Table des matières

I Introduction à la mécanique des fluides **3**
1. Qu'est-ce qu'un fluide ? . . . 3
2. Notion de libre parcours moyen . . . 3
   (a) Définition . . . 3
   (b) Ordres de grandeurs . . . 4
3. Notion de milieu continu . . . 4
   (a) Échelles de longueur et hypothèse de continuité . . . 4
   (b) Particule de fluide . . . 5

II Description eulérienne et lagrangienne **5**
1. Visualisation des écoulements - Mesure de vitesses . . . 5
2. Les deux points de vue : champ des vitesses eulérien et vitesse lagrangienne . . . 8
3. Accélération particulaire. Dérivée particulaire. . . . 9
4. Écoulement stationnaire . . . 9

III Écoulement incompressible **9**
1. Fluide incompressible . . . 9
2. Écoulement incompressible . . . 9
3. Interprétation physique de la divergence . . . 9
4. Remarque : modèle de l'écoulement quasi-unidimentionnel . . . 9

IV Écoulement tourbillonaire ou non **9**
1. Vecteur tourbillon. Écoulement tourbillonaire. . . . 9
2. Interprétation physique du rotationnel . . . 9
3. Potentiel des vitesses - Écoulement incompressible et irrotationnel . . . 9
4. Recherche du champ de vitesse d'un écoulement incompressible connaissant le champ de vecteur tourbillon . . . 9
5. Vortex . . . 9

V Bilan du champ des vitesses au voisinage d'un point **9**

VI Conditions aux limites **9**

VII Exemples **10**
1. Écoulements rotationnels . . . 10
   (a) Modèle de tornade . . . 10
   (b) Modèle de « rond de fumée » . . . 10
2. Quelques écoulements potentiels incompressibles et permanents simples . . . 10
   (a) Écoulement uniforme . . . 10
   (b) Source linéique . . . 10
   (c) Doublet linéique : source - puits . . . 10

La mécanique des fluides est omniprésente. Dans notre monde technologique, l'aéronautique en relève au premier chef, mais aussi la construction automobile (recherche d'aérodynamisme). En biologie, l'écoulement du sang dans les artères, les veines et les capillaires ressortit de ce chapitre, et en géologie, la compréhension des courants marins, des mouvements atmosphériques, donc la prévision météorologique.

La grande difficulté de ce domaine est qu'il est régi par des équations non-linéaires et que l'approche par simulation numérique est encore bridée par une puissance de calcul insuffisante.

Figure 1 – *Kitesurf*

Histoire de la mécanique des fluides

- 1732 : Henri de Pitot invente une machine à mesurer la vitesse des fleuves et des navires.
- 1738 : Daniel Bernoulli exprime le principe de conservation del'énergie dans les écoulements de fluides.
- 1750-1753 : Leonard Euler établit les équations du mouvement d'un fluide non visqueux et en déduit ce qu'on appelle aujourd'hui le théorème de Bernoulli.
- 1768 : d'Alembert établit qu'une sphère en mouvement uniforme dans un fluide ne subit aucune force ; il s'agit du paradoxe qui porte son nom. On sait maintenant qu'on lève celui-ci en introduisant la viscosité.
- 1788 : Lagrange introduit la notion de potentiel des vitesses, ce qui permet une nouvelle approche des écoulements non rotationnels.
- Claude Navier, en 1822, et G.G. Stokes, en 1845 et sous une autre forme, établissent les équations du mouvement d'un fluide visqueux.

- ❄ 1840-1844 : Pour modéliser l'écoulement du sang dans les vaisseaux, le médecin Jean-Louis Poiseuille effectue des mesures très précises sur des canalisations cylindriques et en déduit la relation débit-chute de pression qui porte son nom.
- ❄ 1859-1860 : Helmholtz dégage les idées sur les écoulements rotationnels.
- ❄ 1883-1893 : Osborne Reynolds met en évidence la transition entre régime laminaire et régime turbulent.
- ❄ 1887 : Mach étudie les écoulements supersoniques.
- ❄ 1893 : de Laval met au point la tuyère convergente-divergente.
- ❄ 1900 : Maurice Couette effectue les premières mesures précises de viscosité à l'aide d'un appareil à cylindres tournants.
- ❄ 1903 : Tsiolkovski élabore le principe du moteur à réaction.
- ❄ 1906 : Joukovski établit la relation entre la portance d'une aile et la circulation du vecteur vitesse autour de celle-ci.
- ❄ 1910 : Ludwig Prandtl développe la théorie de la couche limite.
- ❄ 1980 : Les ordinateurs commencent à être assez puissants pour simuler modestement les écoulements turbulents.

I. Introduction à la mécanique des fluides

1. Qu'est-ce qu'un fluide ?

Plusieurs approches sont possibles,

thermodynamique : le diagramme d'état d'un corps pur permet de distinguer l'état solide et l'état fluide qui, en dessous de la température critique, existe sous deux versions, l'état liquide et l'état gazeux ; mais certains corps passent continûment de l'état liquide à l'état solide qui est alors un fluide à viscosité devenue infinie.

empirique : un fluide c'est ce qui coule, mais dans certains cas tout dépend de l'échelle de temps (au delà de l'échelle de l'année, la glace d'un glacier s'écoule et se comporte comme un fluide très visqueux) ; mais un tas de sable, bien que pouvant couler, a un comportement qui le rapproche d'un ensemble de solides en contact ;

mécanique : les forces internes à un corps sont liées aux déformations pour un solide et aux vitesses de déformation pour un fluide, mais existent des comportements mixtes comme le caoutchouc.

Aucune définition ne sera à l'abri d'un contre-exemple et nous adopterons une attitude pragmatique.

2. Notion de libre parcours moyen

(a) Définition

Dans un fluide, l'agitation thermique confère à chaque molécule un mouvement erratique constitué de segments de droites séparant deux chocs successifs avec d'autres molécules ; ces segments ont des directions et des longueurs aléatoires.

On appelle **libre parcours moyen** ℓ la moyenne statistique de leurs longueurs. Qualitativement, il est d'autant plus long que la molécule subit moins de chocs. Il est aisé d'en déduire les deux facteurs essentiels influant sur le libre parcours moyen : la taille de la molécule, donc la nature chimique du

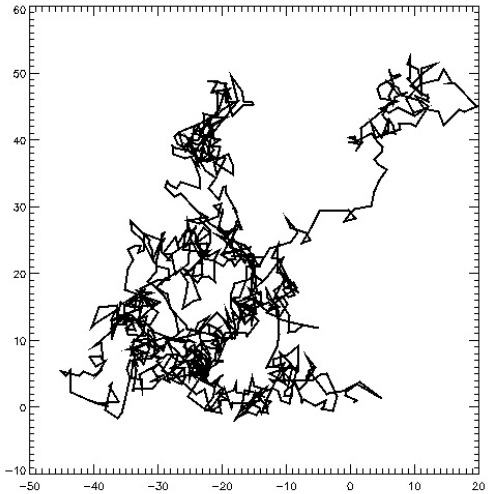

FIGURE 2 – *Mouvement brownien*

fluide, et la densité particulaire du milieu (c'est-à-dire le nombre de molécules par unité de volume). Il n'est pas au programme de PC de proposer un modèle permettant d'évaluer le libre parcours moyen, nous affirmerons ici les résultats à connaître.

(b) Ordres de grandeurs

Pour un **liquide**, pratiquement indépendamment des conditions de température et de pression, le libre parcours moyen est du même ordre de grandeur que la distance interatomique, soit $\ell \simeq 10^{-10}$ m.
Pour un **gaz**, aux conditions normales de température et de pression, $\ell \simeq 10^{-7}$ m, alors que la distance interatomique est de l'ordre de 10^{-9} m.

3. Notion de milieu continu

(a) Échelles de longueur et hypothèse de continuité

Soit un fluide contenu dans un récipient de taille macroscopique. On peut l'étudier à plusieurs échelles de taille.

L'échelle macroscopique : le système que l'on étudie est la totalité du fluide. Bien évidemment, cette approche gomme toutes les inhomogénéités du système et n'est donc pertinente que pour des systèmes homogènes, donc des systèmes à l'équilibre. On utilisera alors avec profit une approche thermodynamique.

L'échelle microscopique (ou atomique) : on étudie chaque molécule comme un système, c'est le domaine de la mécanique du point et de la physique des chocs. On peut penser que cette approche n'est possible que si le récipient ne contient qu'un faible nombre de molécules donc de façon extrêmement rare ; c'est naïf. Cette approche est en fait la seule approche possible lorsque le libre parcours moyen devient supérieur à la taille du récipient et que donc le choc le plus fréquent n'est plus le choc molécule-molécule mais le choc molécule-paroi. Pour un récipient de taille décimétrique à température ordinaire, ça devient vrai en dessous d'une pression de 10^{-1} Pa (10^{-6} atm), c'est le domaine de l'ultra-vide.

L'échelle mésoscopique : dans tous les autres cas, on découpe le système en quasi-particules, c'est à dire en petits sous-systèmes de taille appropriée ; cette taille doit vérifier trois critères :

- ✔ être suffisamment petite pour que les paramètres physiques y soient à peu près uniformes, donc de taille petite devant l'échelle caractéristique des inhomogénéités, ce qui dépend du contexte du problème : c'est l'**hypothèse de continuité**.
- ✔ contenir suffisamment de molécules pour gommer par moyennage les fluctuations statistiques. Nous admettrons qu'en valeur relative ces fluctuations varient comme l'inverse de la racine carrée du nombre de molécules et qu'elles deviennent donc négligeables dès que la quasiparticule contient un million de molécules ; pour cela, il suffit que la taille de la quasi-particule dépasse une centaine de distances interatomiques, soit 10 nm dans un liquide et 100 nm dans un gaz.
- ✔ être suffisamment grande pour que l'agitation thermique ne lui retire ou ne lui ajoute trop de molécules à cause des mouvements erratiques au voisinage de la surface ; nous devinons pour cela que la taille de la quasi-particule devra être grande devant le libre parcours moyen disons cent fois plus, soit 10 nm pour un liquide et 10 μm pour un gaz.

(b) Particule de fluide

En pratique on se place à la limite du troisième critère, le second se trouve vérifié automatiquement et le premier sauf cas tout à fait exceptionnel.

On définit une **particule de fluide** comme un élément de fluide de volume V tel que sa taille $a \simeq \mathrm{V}^{1/3}$ soit :

- ❄ très petite devant les échelles de longueur caractéristiques L de l'écoulement (largeur d'un canal, rayon d'un tube, taille d'un obstacle) ;
- ❄ très grande devant le libre parcours moyen ℓ des molécules.

$$\ell \ll a \ll \mathrm{L}$$

A notre échelle, la particule de fluide est ressentie comme ponctuelle et le milieu comme un milieu continu. La vitesse de cette quasi-particule est la moyenne de celle des molécules qui la composent et n'a donc plus rien à voir avec la vitesse d'agitation thermique qui disparaît du champ de notre étude au profit de la vitesse mésoscopique, qui, du reste, est la seule qui soit simple à mesurer.

II. Description eulérienne et lagrangienne

1. Visualisation des écoulements - Mesure de vitesses

Comment visualiser les vitesses dans un écoulement ? L'idée est d'y incorporer des particules solides réfléchissantes qui seront entraînées, d'éclairer le liquide et de le photographier avec un temps de pose approprié. L'interprétation de la photo est cependant moins évidente qu'il n'y paraît.

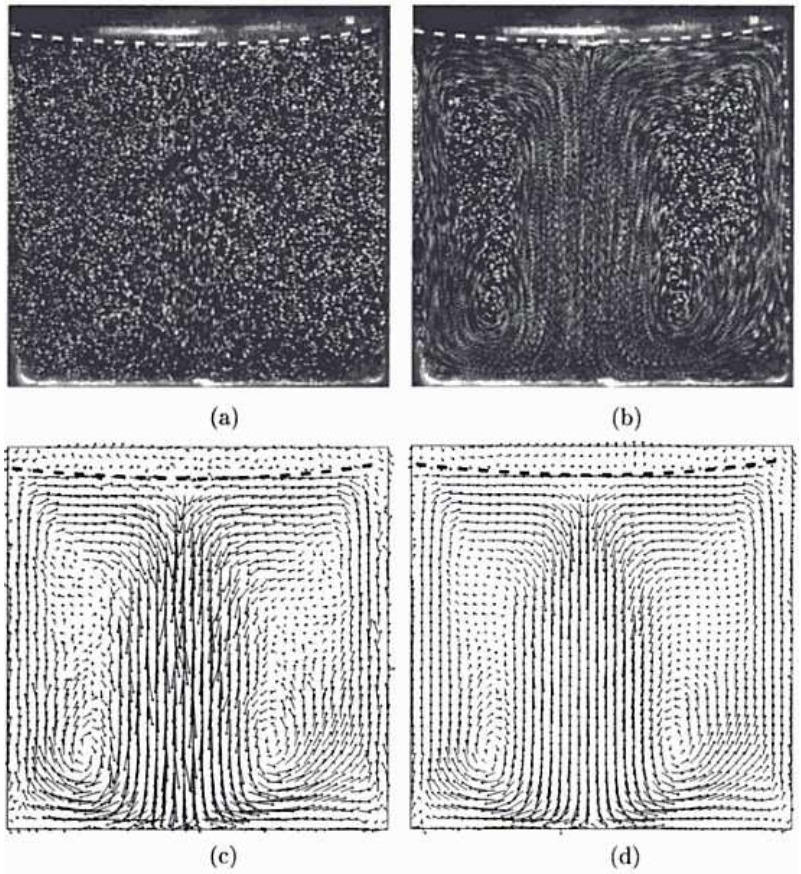

FIGURE 3 – *Illustration de la mesure de vitesse par la méthode de vélocimétrie par images de particules, appliquée à un écoulement de convection induit dans une cavité par refroidissement de la partie supérieure par un bloc de glace dont le contour est marqué en pointillé. (a) Photographie de particules diffusantes correspondant à une exposition très brêve (image de résolution 500 × 500 pixels) : (b) superposition de 4 images successives du type de celle de la figure (a) ; (c) champ de vitesse obtenu par une technique de calcul du « flot optique » à partir de la comparaison de deux images consécutives du type de celle de la figure (a) ; champ des vitesses obtenu avec une précision améliorée en analysant 4 images successives. La vitesse au centre de l'image correspond à un déplacement d'environ 20 pixels entre deux images consécutives (document Hydrodynamique Physique, E. Guyon, JP. Hulin, L. Petit, CNRS Edition p. 157).*

Plusieurs situations se présentent :

- ✔ S'il y a beaucoup de particules partout dans le fluide et que le temps de pause est très court, on visualise les vitesses instantanées au même instant des particules partout dans le fluide. On mesure donc, à un instant donné, le champ des vitesses. Se dessinent à l'œil nu les lignes de champ du vecteur vitesse, appelées lignes de courant (cf. figure 3). On verra dans le paragraphe suivant qu'il s'agit d'un point de vue eulérien.
- ✔ s'il y a moins de particules et un temps de pause plus long, on visualise les trajectoires des particules. On peut, en modulant l'éclairement pour un effet stroboscopique, mesurer l'évolution dans le temps des vitesses d'une même particule. On verra dans le paragraphe suivant qu'il s'agit d'un point de vue lagrangien.
- ✔ Si l'on injecte dans le noir et à intervalle régulier des particules au même point et qu'on fait ensuite une photographie grâce à un bref éclair, on obtient encore autre chose : les positions à un instant donné des particules qui, à un moment ou un autre, sont passées par un point donné (cf. figure 4). On visualise ainsi des lignes d'émission ; nous ne développerons pas cette notion.

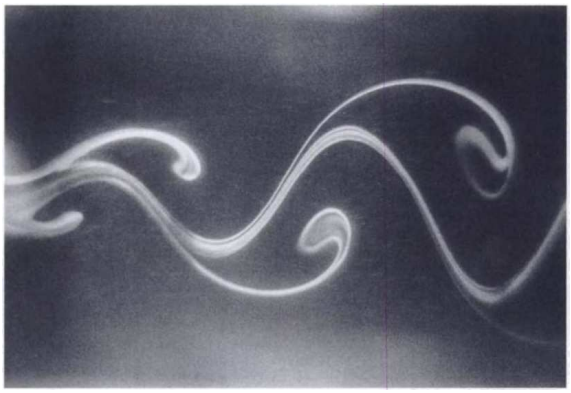

FIGURE 4 – *Visualisation de l'écoulement autour d'un obstacle cylindrique dans les conditions où l'écoulement en aval de l'obstacle est instationnaire. On observe d'une part les lignes d'émission du colorant fluorescent (ici une solution de bleu de méthylène) éclairé par un rayonnement de longueur d'onde adapté. D'autre part, en éclairant le fluide avec un plan de lumière issu d'un laser avec un temps de pose suffisament long, on peut distinguer la trace du déplacement des particules diffusantes à partir desquelles on pueut reconstruire les lignes de courant de l'écoulement (document Hydrodynamique Physique, E. Guyon, JP. Hulin, L. Petit, CNRS Edition p. 150).*

Insistons sur la distinction entre trajectoires et lignes de courant sur l'exemple simple de la figure 5.

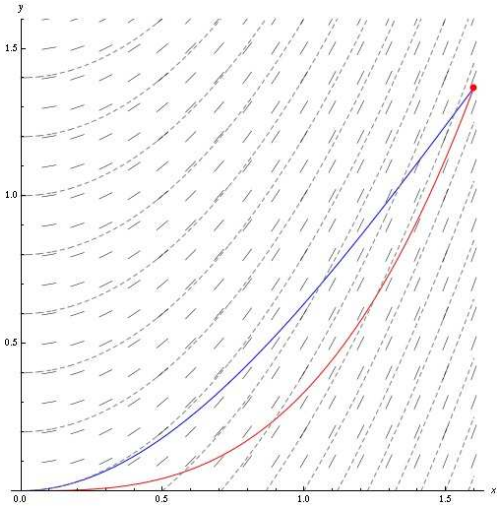

FIGURE 5 – *La particule rouge se déplace dans un fluide en écoulement ; sa trajectoire est tracée en rouge, l'encre bleue, libérée à chaque instant le long de la trajectoire depuis l'origine, suit la particule. Contrairement à la trajectoire statique, l'encre libérée continue d'avancer avec le courant (ceci est une ligne d'émission.) Les lignes en pointillés représentent les contours du champ de vitesse (lignes de courant), montrant le mouvement de l'ensemble du champ au même moment (source : Wikipedia).*

Notons cependant que dans le cas d'un écoulement stationnaire, les lignes de courant, les trajectoires (et les lignes d'émission) coïncident.

2. Les deux points de vue : champ des vitesses eulérien et vitesse lagrangienne

L'ensemble des vitesses $\mathbf{v}$ des particules de fluide de position $\mathbf{r}$ à l'instant t ($\mathbf{r} = \mathbf{OM}$), définit un champ de vecteur $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. On souhaite étudier l'évolution de $\mathbf{v}$ au cours du temps, à ce stade, on peut développer deux points de vue, chacun ayant un avantage certain et un inconvénient majeur par rapport à l'autre.

Du point de vue eulérien, on s'intéresse à la vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ d'une particule de fluide qui coïncide à l'instant t avec le point *fixe* M de vecteur position $\mathbf{r}$; à chaque instant, on regarde donc les vitesses de particules *différentes*. À un instant ultérieur t', la vitesse au même point $\mathbf{r}$ sera devenue $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t')$. Ce point de vue est celui d'un observateur au repos par rapport au référentiel dans lequel est mesurée la vitesse $\mathbf{v}$ et correspond aux mesures expérimentales réalisées avec des sondes fixes par rapport au mouvement du fluide (cf figure 3).

C'est la vitesse eulérienne que nous percevons lorsque nous regardons s'écouler une rivière du haut d'un pont : les particules de fluide qui défilent sous nos yeux sont différentes à chaque instant. Leur vitesse est fonction d'une part, de l'instant d'observation et, d'autre part, du point $\mathbf{r}$ (fixe par rapport au pont) que nous observons.

- ✔ **avantage :** les mesures sont aisées, il suffit de placer un capteur et un enregistreur au point M
- ✔ **inconvénient :** au cours du temps, la particule qui est au point M n'est jamais la même et les lois de la physique ne peuvent s'y appliquer.

Du point de vue lagrangien, on suit une particule de fluide au cours de son mouvement, en spécifiant sa position $\mathbf{r_0}$ ($\mathbf{r_0} = \mathbf{OM_0}$) à un instant de référence donné t_0. La vitesse du fluide est alors caractérisée par le vecteur $\mathbf{V}(\mathbf{r_0}, t)$ qui est fonction de deux variables $\mathbf{r_0}$ et t ; la notation en majuscule souligne la distinction avec le champ de vitesse eulérien $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.

Dans la description imagée de la rivière qui s'écoule, ce point de vue est celui d'un observateur sur une barque entraînée par le courant : la vitesse de la barque représente la vitesse lagrangienne. Le point de vue lagrangien correspond à des mesures faites avec des instruments qui suivent le fluide dans son mouvement, tels que les ballons-sondes dans l'atmosphère ou des particules marquées.

- ✔ **avantage** : la quasi-particule est un système fermé et les lois de la physique s'y appliquent.
- ✔ **inconvénient :** il est difficile de suivre le mouvement d'une goutte d'eau dans l'écoulement d'un torrent impétueux et il est donc difficile d'effectuer des mesures pour vérifier les prédictions théoriques.

On remarquera que ce qui fait la force d'un point de vue fait la faiblesse de l'autre et vice-versa.

3. Accélération particulaire. Dérivée particulaire.

4. Écoulement stationnaire

III. Écoulement incompressible

1. Fluide incompressible

2. Écoulement incompressible

3. Interprétation physique de la divergence

4. Remarque : modèle de l'écoulement quasi-unidimentionnel

IV. Écoulement tourbillonaire ou non

1. Vecteur tourbillon. Écoulement tourbillonaire.

2. Interprétation physique du rotationnel

3. Potentiel des vitesses - Écoulement incompressible et irrotationnel

4. Recherche du champ de vitesse d'un écoulement incompressible connaissant le champ de vecteur tourbillon

5. Vortex

V. Bilan du champ des vitesses au voisinage d'un point

VI. Conditions aux limites

VII. Exemples

1. Écoulements rotationnels

(a) Modèle de tornade

(b) Modèle de « rond de fumée »

2. Quelques écoulements potentiels incompressibles et permanents simples

(a) Écoulement uniforme

(b) Source linéique

(c) Doublet linéique : source - puits

(a) Tornade à la surface de l'eau.

(b) Anneau tourbillon sortant de la Bocca Nuova de l'Etna le 24 février 2000.

FIGURE 6 – *Exemples d'écoulements rotationnels.*