DM n°1 φ EVM/PC/09-10 à rendre pour le 18/09/09

Problème I Mines-Ponts MP 2007

A 2007 PHYS. I MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 2007

PREMIERE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage de la calculatrice est autorisé

Sujet mis à disposition des concours : ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE I –MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages.

• Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

• Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être utilisé pour les questions ultérieures, même s'il n'a pas été démontré.

• Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

Notations : vecteur → $\vec{\mathbf{A}}$ (gras) ; norme du vecteur $\vec{\mathbf{V}}$ → V (italique) ; vecteur unitaire → $\hat{\mathbf{a}}$.

Dans toute l'épreuve, *exprimer* signifie « donner l'expression littérale » et *calculer* signifie « donner la valeur numérique ».

SATELLITES DE TÉLÉCOMMUNICATION

On se propose d'étudier quelques aspects du fonctionnement de satellites de télécommunication en orbite autour de la Terre. Sauf mention contraire, on considérera que la Terre est une sphère homogène de rayon R_T et de centre O, immobile dans l'espace, sans rotation propre.

À la fin de cet énoncé (page 7), sont regroupées des valeurs de grandeurs physiques et un formulaire utilisables dans cette épreuve.

I SATELLITES SUR ORBITE CIRCULAIRE

❑ **1** – Un satellite de masse M_S est en orbite circulaire de centre O, à une altitude h de l'ordre de quelques centaines de kilomètres (orbite basse). Établir la relation entre la période

de révolution T et h. Exprimer de même la relation entre la vitesse $v = \|\vec{\mathbf{v}}\|$ et h.

❑ **2** – Soient E_c et E_p l'énergie cinétique du satellite et son énergie potentielle dans le champ de gravitation de la Terre ; établir le « théorème du viriel » : $2E_c + E_p = 0$.

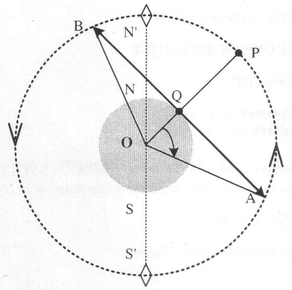

Fig. 1 : Satellite P, point Q et ligne des horizons AB. Le plan orbital représenté est dit polaire (la ligne des pôles est N'SNS'). L'angle est dit ancillaire.

❑ **3** – À chaque position P du satellite correspond un point Q sur la Terre à la verticale de ce point. L'ensemble des points Q définit la trace de la trajectoire. Pour un observateur situé en Q, la durée de visibilité τ d'un satellite est l'intervalle de temps entre son apparition sur l'horizon (point A de la Fig. 1) et sa disparition sous l'horizon (point B). Exprimer τ en fonction de h, G, M_T et R_T.

Calculer τ pour $h = 8\times10^5$ m.

❑ **4** – Calculer T/τ. Pour les besoins de la téléphonie mobile, on place sur des orbites polaires (c'est-à-dire contenues dans un plan méridien terrestre) un ensemble de satellites, identiques, appelé « train de satellites ». Ces satellites sont disposés régulièrement sur leur orbite polaire commune, à l'altitude de 800 km. Calculer le nombre minimal de satellites nécessaires pour former un « train » afin que tous les points au sol, dans le même plan méridien que l'orbite, voient au moins un satellite à tout instant.
Combien d'orbites polaires de ce type faut-il pour couvrir la surface de la Terre, c'est à dire pour que chaque point de la surface terrestre voie au moins un satellite à tout instant ? Combien doit-on disposer de satellites en tout ?

❑ **5** – Dans cette question, on prend en compte la rotation de la Terre. Calculer la période et l'altitude d'un satellite placé sur orbite géostationnaire. La notion de durée de visibilité garde-t-elle, dans ce cas, un sens ? Quels sont les avantages et les inconvénients d'un satellite géostationnaire comparé au train de la question **4** ?

❑ **6** – La Terre est entourée d'une atmosphère qui s'oppose au mouvement du satellite. La force de frottement $\vec{\mathbf{f}}_a$ créée par l'atmosphère est proportionnelle au carré de la vitesse v du satellite et elle s'exprime par $\vec{\mathbf{f}}_a = -\alpha M_S\, v\vec{\mathbf{v}}$, où α a une valeur positive, constante dans cette question. Déterminer la dimension de α. Écrire le théorème de l'énergie cinétique en supposant que le théorème du viriel établi à la question **2** reste applicable en présence de $\vec{\mathbf{f}}_a$. Établir l'équation différentielle vérifiée par h.

❑ **7** – Un satellite placé sur une orbite d'altitude 800 km subit une diminution d'altitude d'environ 1 m par révolution ; sa vitesse est, en norme, très peu affectée au bout d'une révolution. En déduire une estimation au premier ordre de α (ne pas s'étonner de la petitesse extrême du résultat !). Calculer, avec la même approximation, ce qu'il advient de l'altitude au bout de 10 ans de fonctionnement du satellite. Comparer à la solution exacte. Le fait d'avoir une augmentation de la vitesse en présence d'une force opposée au mouvement est-il paradoxal ?

❑ **8** – En réalité, les frottements dépendent de la densité de l'atmosphère et donc de l'altitude. Dans un certain domaine d'altitudes, α varie selon la loi $\alpha(h) = \dfrac{\gamma}{h^\beta}$, où γ et β sont positifs. Le même satellite que celui de la question **7** (perdant 1 mètre par révolution pour $h \approx 800$ km) perd, à l'altitude de 400 km, 2 mètres par révolution. Calculer γ et β.

II STABILISATION DE L'ATTITUDE D'UN SATELLITE SUR SON ORBITE PAR GRADIENT DE GRAVITÉ

La méthode de stabilisation d'attitude par gradient de gravité a été mise en œuvre pour les satellites artificiels afin qu'ils présentent vers la Terre toujours le même côté. Elle ne requiert aucune ressource d'énergie embarquée. Le principe de cette méthode a été établi par Lagrange, au XVII$^{\text{ème}}$, afin d'expliquer pourquoi la Lune présente toujours la même face vers la Terre.

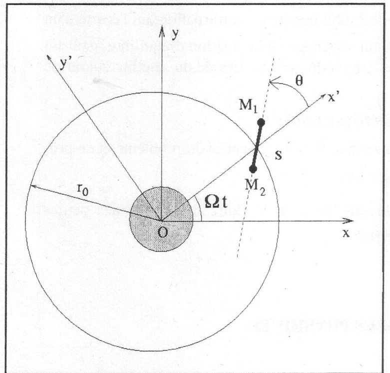

Fig. 2 : Le satellite, son référentiel R' (O$x'y'$) et le référentiel R lié à la Terre (Oxy).

Modèle : le satellite est constitué de deux points matériels M_1 et M_2 de masses identiques $m = \dfrac{1}{2}M_S$ reliés par une tige rigide de masse nulle et de longueur $2l$. Le barycentre S du satellite décrit autour de la Terre une orbite circulaire de rayon $r_0 = R_T + h$ ($l << r_0$). Le référentiel géocentrique (R) lié au repère (Oxyz) est supposé galiléen. Le plan orbital est Oxy. Le référentiel (R') défini par le repère (O$x'y'z$) lié au satellite tourne autour de la Terre avec une vitesse angulaire Ω (Fig. 2). Les points M_1 et M_2 sont dans le plan orbital : $\overrightarrow{\mathbf{OS}} = r_0\hat{\mathbf{u}}$, $\overrightarrow{\mathbf{OM}}_1 = r_1\hat{\mathbf{u}}_1$ et $\overrightarrow{\mathbf{OM}}_2 = r_2\hat{\mathbf{u}}_2$, où $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{u}}_1$ et $\hat{\mathbf{u}}_2$ sont unitaires. On appelle θ l'angle de M_1M_2 avec l'axe Ox' de (R'). On cherche à déterminer les éventuelles positions d'équilibre du satellite dans le référentiel (R') et leur stabilité. On suppose qu'il n'y a pas de frottements.

Étude dynamique, dans le référentiel mobile

❑ **9** – Exprimer les forces gravitationnelles $\vec{\mathbf{F}}_1$ et $\vec{\mathbf{F}}_2$ qui agissent sur M_1 et M_2.

❑ **10** – Exprimer dans (R') les forces d'inertie d'entraînement qui agissent sur M_1 et M_2, en fonction de m, Ω, $\vec{\mathbf{r}}_1$ et $\vec{\mathbf{r}}_2$. Exprimer dans (R') les forces d'inertie de Coriolis qui agissent

sur M_1 et M_2, en fonction de m, Ω, $\overrightarrow{\mathbf{SM}}_1$, $\overrightarrow{\mathbf{SM}}_2$ et $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$.

❑ **11** – Montrer que dans (R') le moment des forces d'inertie de Coriolis en S est nul. Établir que dans (R') le moment résultant calculé en S des actions extérieures a pour amplitude, pour $l << r_0$, $\Gamma_S = 6GmM_T\dfrac{l^2}{r_0^3}\sin(\theta)\cos(\theta)$. Préciser la direction et le sens de ce moment cinétique.

❑ **12** – Appliquer le théorème du moment cinétique dans (R'). Établir l'équation différentielle du mouvement. Déterminer les valeurs de θ qui correspondent à une position d'équilibre dans (R').

❑ **13** – Montrer que $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable. Existe-t-il une position d'équilibre instable ? Quelle est la forme de l'équation différentielle pour les petits mouvements autour de cette position d'équilibre instable ?

❑ **14** – À partir de la position $\theta = 0$, le satellite subit une petite perturbation qui l'écarte d'un angle θ_o. Calculer la période des oscillations au voisinage de la position d'équilibre, pour un satellite d'altitude h = 800 km. Comparer cette période avec la période du satellite autour de la Terre.

Étude énergétique, dans le référentiel géocentrique galiléen

❑ **15** – Exprimer le potentiel de gravitation, en fonction des données du problème et en procédant aux approximations qui s'imposent ($l << r_0$).

❑ **16** – Considérer l'énergie mécanique du satellite et en déduire la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable.

DONNÉES PHYSIQUES

constante de gravitation	$G = 6{,}67\ 10^{-11}\ \mathrm{m^3.kg^{-1}.s^{-2}}$
rayon de la Terre	$R_T = 6400$ km
masse de la Terre	$M_T = 6{,}0\ 10^{24}$ kg
masse du satellite	$M_S = 2{,}0\ 10^3$ kg
perméabilité du vide	$\mu_o = 4\pi.10^{-7}\ \mathrm{H.m^{-1}}$
vitesse de la lumière	$c = 3.10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}$
masse de l'électron	$m_e = 0{,}91.10^{-30}$ kg
charge élémentaire	$e = 1{,}6.10^{-19}$ C

Problème II / Centrale PC 2006

PHYSIQUE II

Ce problème étudie différentes manières de réaliser un variomètre, instrument de mesure de la vitesse verticale d'un engin volant. Cet appareil est indispensable aux pilotes des aéronefs sans moteur (planeurs, deltaplanes et parapentes) puisqu'il leur sert à détecter les courants d'air ascendants qui permettent à ces aéronefs de se maintenir en l'air ou de gagner de l'altitude.

On donne

la décomposition en série de Fourier d'une fonction créneau $f(t)$ impaire de période T et d'amplitude crête à crête $2E_0$:

$$f(t) = \frac{4E_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2k+1)\frac{2\pi t}{T}\right]}{(2k+1)}.$$

Partie III - Variomètre à affichage électronique

Cette technologie est généralement utilisée pour des variomètres de faible taille où les déplacements du piston sont plus réduits que dans la partie II. Les déplacements x du piston sont transmis à un système de condensateurs différentiels.

Ces condensateurs permettent, à l'aide d'une électronique adaptée, de déterminer le déplacement x du piston qui, sous certaines conditions est une image de la vitesse verticale V_z de l'aéronef. On supposera dans toute cette partie que ces conditions sont vérifiées. On a donc $x = \lambda V_z$ où λ est une constante positive. Le capteur à capacités différentielles comporte quatre condensateurs C_{1a}, C_{1b}, C_{2a} et C_{2b} assimilables à des condensateurs plans. On négligera les effets de bord.

Au repos, défini par la position $x = 0$, les armatures des condensateurs sont toutes distantes de e_0. Elles ont une surface en regard S et baignent dans un liquide diélectrique de permittivité ε. Dans toute cette partie, on supposera $x \ll e_0$.

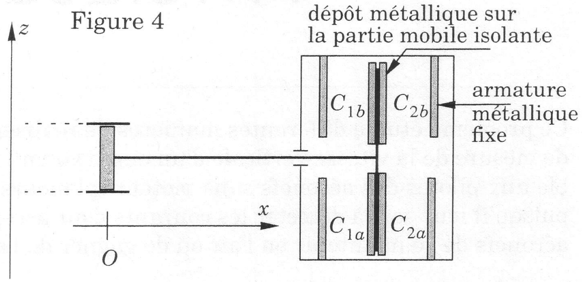

Figure 4

On rappelle que, si l'on néglige les effets de bord, la capacité d'un condensateur plan est donnée par $C = \varepsilon S/e$, où S est la surface des armatures en regard et e la distance séparant ces armatures.

III.A - Étude du système de capacités différentielles

III.A.1) En négligeant les effets de bord, déterminer les expressions des capacités variables : C_{1a}, C_{1b}, C_{2a} et C_{2b} en fonction de ε, S, e_0 et x.

III.A.2) *Application numérique* :
$\varepsilon = 1,6\times10^{-8}\,\mathrm{SI}$, $S = 9\ \mathrm{cm}^2$, $e_0 = 3\ \mathrm{mm}$.

Déterminer la valeur commune des capacités lorsque $x = 0$.

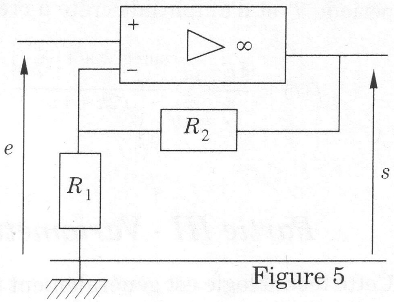

Figure 5

III.B - Oscillateur à pont de Wien

Dans toute cette partie, on supposera les amplificateurs opérationnels (AO) idéaux, fonctionnant en régime linéaire.

III.B.1) On considère le quadripôle figure 5.

a) Préciser le modèle de l'amplificateur idéal en régime linéaire. Déterminer la fonction de transfert $\underline{F} = \underline{S}/\underline{E}$ en fonction de R_1 et R_2 quand l' AO fonctionne en régime linéaire. Préciser les limitations pratiques que l'on peut rencontrer.

b) Tracer la caractéristique $s(e)$, c'est-à-dire le graphe représentant s en ordonnée en fonction de e en abscisse.

III.B.2) Étude du filtre de Wien ci-contre (figure 6).

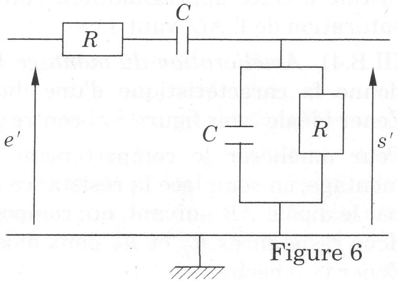

Figure 6

a) Déterminer la fonction de transfert

$$\underline{G} = \frac{\underline{S'}}{\underline{E'}}.$$

Préciser les paramètres caractéristiques du filtre (gain maximum, facteur de qualité, pulsation particulière).

b) Tracer le diagramme de Bode (gain et phase) associé à $\underline{G}$. On fera apparaître sur chacun des graphes le tracé asymptotique et le tracé réel. Quelle est la fonction de ce quadripôle ?

III.B.3)

a) On couple le filtre de Wien avec le montage amplificateur du III.B.1 figure 5. On ne tient aucun compte de la réponse fréquentielle de l'amplificateur et on suppose le régime linéaire toujours établi. À partir des expressions $\underline{F}$ et $\underline{G}$, montrer qu'il peut théoriquement exister un signal sinusoïdal sans générateur basse fréquence pour une valeur $r = R_2/R_1$ et une fréquence particulière f à déterminer.

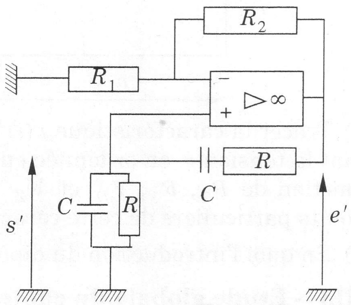

Figure 7

b) En utilisant la relation imposée par l'amplificateur et l'équation différentielle du filtre de Wien, établir l'équation différentielle vérifiée par s'. Montrer qu'il peut exister un signal sinusoïdal sans générateur B.F. Retrouver les conditions du III.B.3-a. Calculer numériquement f si $R = 10\ \mathrm{k\Omega}$ et $C = 4,8\ \mathrm{nF}$. Peut-on légitimement ignorer la réponse fréquentielle de l'AO ?

c) En pratique, on ne sait pas réaliser exactement la condition $r = R_2/R_1$. À partir de l'équation différentielle précédente, montrer qu'une condition d'apparition des oscillations est $r = R_2/R_1 > n$ (n entier à définir). Si on choisit $R_2 = 10\ \mathrm{k\Omega}$, les valeurs disponibles dans les catalogues étant $4,7\ \mathrm{k\Omega}$, $5,6\ \mathrm{k\Omega}$, $10\ \mathrm{k\Omega}$, quelle valeur doit-on prendre pour R_1 ?

d) Si l'on fait varier la valeur de R_1 à l'aide d'un potentiomètre on constate que le signal de sortie évolue entre une sinusoïdale légèrement écrêtée et un signal carré. En déduire un encadrement de l'amplitude maximale du signal $e'(t)$ en ne gardant que le terme fondamental du développement en série de Fourier. On

justifiera cette approximation. Faire l'application numérique si la tension de saturation de l'AO vaut $13\ \mathrm{V}$.

III.B.4) *Amélioration du montage.* On donne la caractéristique d'une diode Zener idéale (voir figure 8 ci-contre).

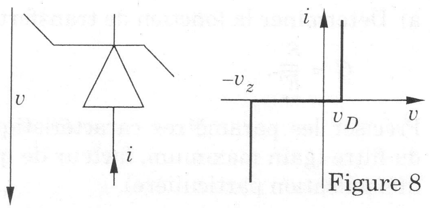

Figure 8

Pour améliorer le comportement du montage, on remplace la résistance R_2 par le dipôle AB suivant, qui comporte deux résistances R_2 et R_3 deux diodes Zener tête bêche.

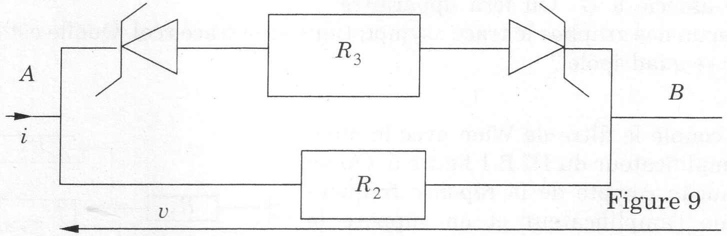

Figure 9

a) Tracer la caractéristique $v(i)$ du dipôle AB, c'est-à-dire le graphe représentant la tension v en ordonnée en fonction du courant i en abscisse. Préciser en fonction de R_2, R_3, V_D et V_Z les différentes pentes et les coordonnées des points particuliers de cette caractéristique.

b) En quoi l'introduction du dipôle AB améliore la qualité de l'oscillateur ?

III.C - Étude globale du capteur

Le capteur complet se compose du système de condensateurs C_{1a} et C_{1b}, de capacité C_1 et du système de condensateurs C_{2a} et C_{2b} de capacité C_2. Ces condensateurs sont utilisés dans deux oscillateurs sinusoïdaux à pont de Wien qui oscillent respectivement aux pulsations $\omega_1 = 1/RC_1$ et $\omega_2 = 1/RC_2$. Soit $v_1(t) = A\cos(\omega_1 t)$ le signal issu du premier oscillateur et $v_2(t) = A\cos(\omega_2 t)$ le signal issu du second oscillateur. Ces signaux sont traités par un montage électronique comportant un multiplieur qui fournit la tension $v_m(t) = k_m v_1(t) v_2(t)$ et une cellule de filtrage $R'C'$, avec k_m une constante multiplicative. La tension $v_{C'}$ aux bornes du condensateur de la cellule $R'C'$ est alors analysée par un fréquencemètre qui délivre une tension continue V_S proportionnelle à la fréquence f de $v_{C'}$. On posera $V_S = \gamma f$.

Comment faut-il choisir le produit $\tau' = R'C'$ pour obtenir une tension V_S proportionnelle à x ?

Déterminer alors la relation entre V_S et la vitesse verticale de l'aéronef.

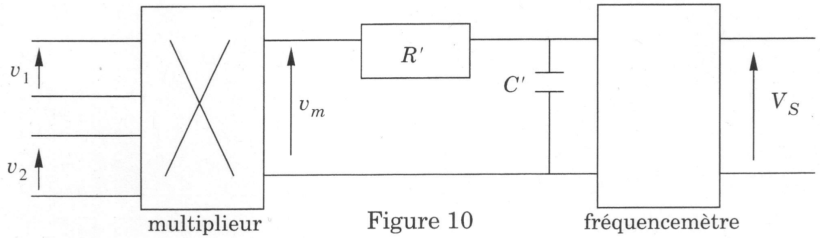

Figure 10

••• FIN •••