

* Banque filière PT *

Epreuve de Physique A

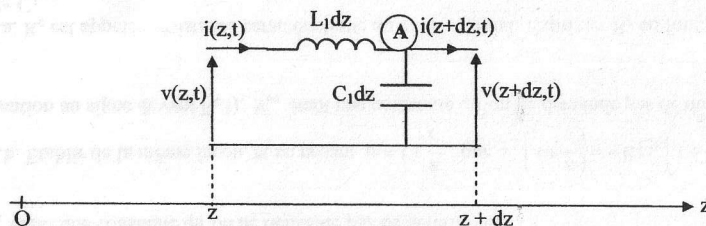
Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est autorisé.

Partie B : Propagation des signaux dans une ligne sans perte (65%)

Pour tenir compte des phénomènes de propagation dans le câble coaxial, on modélise une portion du câble de longueur élémentaire dz par le circuit suivant (modèle de la ligne sans perte) :



L_1 correspond à l'inductance propre par unité de longueur de la ligne.
 C_1 correspond à la capacité par unité de longueur de la ligne.

Dans toute la suite, on suppose que les fonctions $v(z,t)$ et $i(z,t)$ sont, sur le plan mathématique, de classe C^2 .

1. Equation de propagation

1.1. Ecrire la loi des nœuds au point A et en déduire que $v(z,t)$ et $i(z,t)$ vérifient l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial i}{\partial z} = -C_1 \frac{\partial v}{\partial t}$.

1.2. En appliquant la loi des mailles, montrer que $v(z,t)$ et $i(z,t)$ vérifient également l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial v}{\partial z} = -L_1 \frac{\partial i}{\partial t}$.

1.3. Montrer que $v(z,t)$ et $i(z,t)$ vérifient une équation de d'Alembert : $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, la notation c désignant la vitesse de propagation des signaux dans cette ligne.

1.4. a. Préciser l'expression de cette vitesse c de propagation, en fonction de L_1 et C_1 .

1.4. b. Vérifier l'homogénéité de ce dernier résultat.

1.5. Calculer la valeur numérique de la vitesse de propagation c , compte tenu des résultats obtenus aux questions A.1.7 et A.2.6.

On admet que les solutions générales de l'équation de propagation sont :

$$\begin{cases} v(z,t) = v_a \left(t - \frac{z}{c} \right) + v_b \left(t + \frac{z}{c} \right) \\ i(z,t) = i_a \left(t - \frac{z}{c} \right) + i_b \left(t + \frac{z}{c} \right) \end{cases}$$

1.6. Quelle est la signification physique de ces solutions?

1.7.a. On se place dans le cas où $\begin{cases} v(z,t) = v_a \left(t - \frac{z}{c} \right) \\ i(z,t) = i_a \left(t - \frac{z}{c} \right) \end{cases}$. On posera : $u = t - \frac{z}{c}$.

③

En utilisant l'équation aux dérivées partielles donnée à la question B.1.2, montrer l'existence d'une quantité R_c , fonction de L_1 et de c , telle que : $v_a \left(t - \frac{z}{c} \right) = R_c i_a \left(t - \frac{z}{c} \right) + V_{a0}$, V_{a0} étant une constante qu'on ne demande pas de déterminer.

1.7.b. Etablir de la même façon, et en posant $w = t + \frac{z}{c}$, que $v_b \left(t + \frac{z}{c} \right) = -R_c i_b \left(t + \frac{z}{c} \right) + V_{b0}$ (attention au signe devant R_c !), V_{b0} étant une constante qu'on ne demande pas de déterminer.

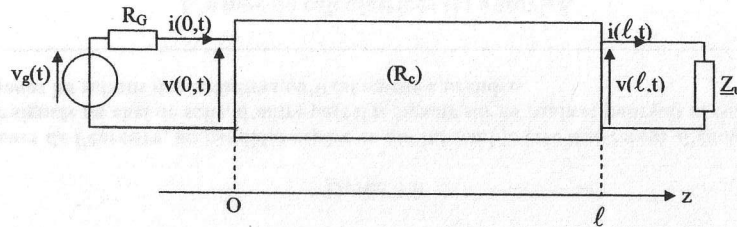
1.8.a. R_c est appelée résistance caractéristique du câble coaxial. Exprimer R_c en fonction de L_1 et de C_1 .

1.8.b. Calculer la valeur numérique de R_c , compte tenu des résultats obtenus aux questions A.1.7 et A.2.6.

Dans toute la suite du problème, on suppose que les constantes V_{a0} et V_{b0} sont nulles.

2. Ligne en régime permanent sinusoïdal

On applique à l'entrée de la ligne une tension sinusoïdale de pulsation ω .
Le câble coaxial est chargé par un dipôle d'impédance complexe Z_u , nommée dans la suite « impédance de charge ».
L'ensemble du dispositif fonctionne en régime permanent sinusoïdal.



Le générateur fournit une force électromotrice sinusoïdale : $v_g(t) = V_g \cos(\omega t)$.

À la tension $v(z,t) = V(z) \cos(\omega t + \phi_v(z))$, on associe la grandeur complexe $\underline{v}(z,t) = \underline{V}(z)e^{j\omega t}$.

À l'intensité $i(z,t) = I(z) \cos(\omega t + \phi_i(z))$, on associe la grandeur complexe $\underline{i}(z,t) = \underline{I}(z)e^{j\omega t}$.

④

On a alors pour les amplitudes complexes les relations suivantes, dans lesquelles $\underline{V}_a$ et $\underline{V}_b$ sont deux constantes complexes qu'on déterminera ultérieurement :

$$\begin{cases} \underline{V}(z) = \underline{V}_a e^{-jkz} + \underline{V}_b e^{jkz} \\ \underline{I}(z) = \frac{\underline{V}_a}{R_c} e^{-jkz} - \frac{\underline{V}_b}{R_c} e^{jkz} \end{cases} \text{ avec } k = \frac{\omega}{c}.$$

2.1. Par un calcul qui n'est pas demandé ici, on établit la constance de la quantité $\frac{1}{2} \Re [\underline{V}(z) \cdot \underline{I}^*(z)]$, la notation $\Re$ signifiant « partie réelle de », $\underline{I}^*(z)$ étant le complexe conjugué de $\underline{I}(z)$. Après avoir exprimé cette quantité en fonction de $V(z)$ et $I(z)$, amplitudes des tension $v(z,t)$ et intensité $i(z,t)$, et de $\phi(z)$, déphasage de $v(z,t)$ par rapport à $i(z,t)$, expliquer de façon soignée et argumentée à quoi correspond, sur le plan physique, cette constance.

2.2. Exprimer $\underline{V}(0)$ et $\underline{I}(0)$ en fonction de $\underline{V}_a$ et $\underline{V}_b$ et de R_c .

2.3. En déduire $\underline{V}_a$ et $\underline{V}_b$ en fonction de $\underline{V}(0)$, $\underline{I}(0)$ et de R_c , puis en fonction de $\underline{V}(0)$, de R_c et du quotient $\underline{Z}(0) = \frac{\underline{V}(0)}{\underline{I}(0)}$.

2.4. On nomme « impédance complexe en un point d'abscisse z de la ligne », la quantité complexe définie par $\underline{Z}(z) = \frac{\underline{V}(z)}{\underline{I}(z)}$; établir la relation suivante :

$$\underline{Z}(z) = R_c \cdot \frac{\underline{Z}(0) - jR_c \tan(kz)}{R_c - j\underline{Z}(0) \tan(kz)}.$$

2.5. Montrer que « l'impédance ramenée à l'entrée de la ligne », par définition égale à $\underline{Z}(0)$, est liée à « l'impédance de charge Z_u » par la relation suivante :

$$\underline{Z}(0) = R_c \cdot \frac{\underline{Z}_u + jR_c \tan(kl)}{R_c + j\underline{Z}_u \tan(kl)}.$$

2.6.a. Exprimer $\underline{V}(0)$ en fonction de V_g , de R_G et de $\underline{Z}(0)$.

2.6.b. En déduire, compte tenu des résultats de la question B.2.3, que $\underline{V}_a = \frac{1}{2} V_g \frac{\underline{Z}(0) + R_c}{\underline{Z}(0) + R_G}$ et

$$\text{que } \underline{V}_b = \frac{1}{2} V_g \frac{\underline{Z}(0) - R_c}{\underline{Z}(0) + R_G}.$$

2.7. On ferme la ligne sur sa résistance caractéristique, c'est-à-dire qu'on choisit : $\underline{Z}_u = R_c$.

2.7.a. Que vaut alors « l'impédance ramenée à l'entrée de la ligne » $\underline{Z}(0)$?

2.7.b. Que peut-on dire, alors, de la valeur de V_b ?

2.7.c. Exprimer alors $V(z)$ et $I(z)$ en fonction de V_a , de R_c et du produit (kz) . Commenter physiquement.

2.7.d. Donner les expressions de la tension $v(\ell, t)$ et de l'intensité $i(\ell, t)$ en fonction de V_g , R_c , R_G , ω , c , ℓ et t .

On note, dans les questions 2.8 à 2.10 ci-dessous, λ la longueur d'onde associée à la pulsation ω , pour la propagation dans cette ligne coaxiale.

2.8. On ferme la ligne par un court circuit.

2.8.a. En déduire l'expression de l'impédance ramenée $Z(0)$.

2.8.b. La partie réelle de $Z(0)$ est nulle ; montrer que cette propriété est cohérente avec celle évoquée à la question 2.1.

2.8.c. Que vaut l'impédance ramenée $Z(0)$ pour une ligne de longueur $\ell = \lambda/4$ (ligne quart d'onde) ?

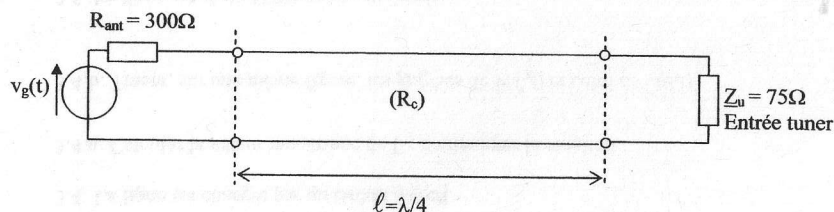
2.9. On «ferme» la ligne par un circuit ouvert.

2.9.a. En déduire l'expression de l'impédance ramenée $Z(0)$.

2.9.b. La partie réelle de $Z(0)$ est nulle ; y'a-t-il cohérence de cette propriété avec celle évoquée à la question 2.1 ?

2.9.c. Que vaut l'impédance ramenée $Z(0)$ pour une ligne de longueur $\ell = \lambda/4$ (ligne « quart d'onde ») ?

2.10. On veut adapter une antenne FM de type dipôle replié dont l'impédance complexe -ici réelle- vaut $R_{ant} = 300 \Omega$, à l'entrée d'un tuner dont l'impédance complexe d'entrée, également réelle, vaut 75Ω . A cette fin, on relie l'antenne au tuner (voir figure ci-dessous) par une ligne de longueur ℓ ; l'adaptation est réalisée lorsque l'impédance ramenée $Z(0)$ est égale à R_{ant} , impédance de l'antenne.

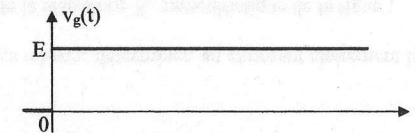


Déterminer -et calculer- la résistance caractéristique R_c de la ligne d'adaptation si sa longueur vaut : $\ell = \lambda/4$.

3. Ligne en régime impulsionnel

La ligne est chargée par une résistance R_u .

La fém $v_g(t)$ fournie par le générateur fournit un échelon de tension d'amplitude E .



La résistance interne du générateur est réglée de telle sorte que $R_G = R_c$: la ligne est adaptée côté générateur.

3.1. Montrer que le rapport $\Gamma = \frac{v_b(t + \ell/c)}{v_a(t - \ell/c)}$ est donnée par : $\Gamma = \frac{R_u - R_c}{R_u + R_c}$.

Quelle est la signification physique du coefficient Γ ?

3.2.a. Etablir une relation entre la fém $v_g(t)$, R_G (égale à R_c), les tension $v(z=0, t)$ et intensité $i(z=0, t)$ à l'entrée de la ligne.

3.2.b. En déduire, compte tenu des relations mentionnées aux questions 1.7.a et 1.7.b (les constantes V_{a0} et V_{b0} étant nulles), la tension incidente $v_a(t)$ à l'entrée de la ligne en fonction de E pour $t > 0$.

3.2.c. Après avoir proposé et exploité **soigneusement** les schémas équivalents à l'entrée de la ligne pour l'onde incidente et l'onde réfléchie, retrouver, par une deuxième méthode, la tension incidente $v_a(t)$ à l'entrée de la ligne pour $t > 0$.

3.3. La ligne est chargée par sa résistance caractéristique, soit $R_u = R_c$.

3.3.a. Déterminer la valeur de Γ ; conclusion ?

3.3.b. Exprimer la tension à l'extrémité de la ligne, $v(\ell, t)$, en fonction de v_g , t , ℓ et c .

3.3.c. Tracer le graphe de $v(\ell, t)$.

3.4. La ligne est chargée par un circuit ouvert.

3.4.a. Calculer la valeur numérique de Γ ; commenter le résultat.

3.4.b. Tracer, sur une même figure, les graphes de $v(\ell, t)$ et celui de $v(0, t)$.

3.5. La ligne est chargée par un court circuit.

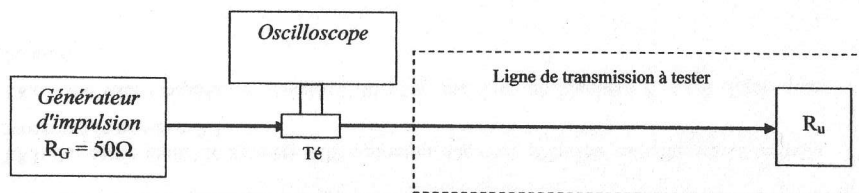
3.5.a. Calculer la valeur numérique de Γ ; commenter le résultat.

3.5.b. Tracer le graphe de $v(0, t)$.

3.6. Application : le réflectomètre temporel (Time Domain Reflectometer)

Lors de mesures sur des lignes, il est souvent nécessaire de connaître non seulement la nature et la valeur des discontinuités rencontrées (symbolisées sur la figure ci-dessous par la résistance R_u , différente de R_c), mais également leur position le long de la ligne. Le réflectomètre temporel est l'instrument idéal pour ce genre de mesures.

La figure suivante donne le schéma de principe du réflectomètre temporel :



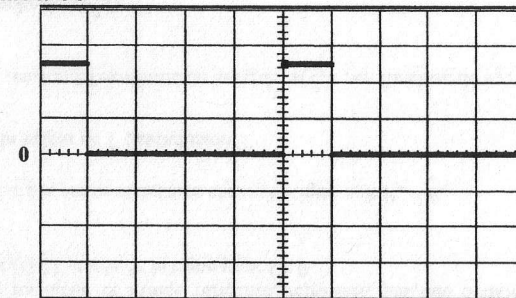
On suppose que le « Té » indiqué ci-dessus permet, compte tenu des caractéristiques d'entrée de l'oscilloscope, une mesure de la tension à l'entrée de la ligne sans en perturber le fonctionnement.

Le générateur fournit une impulsion rectangulaire d'amplitude $E = 10V$, à vide, et de durée τ . On suppose que la durée τ est petite par rapport au temps de propagation entre l'entrée et la sortie de la ligne.

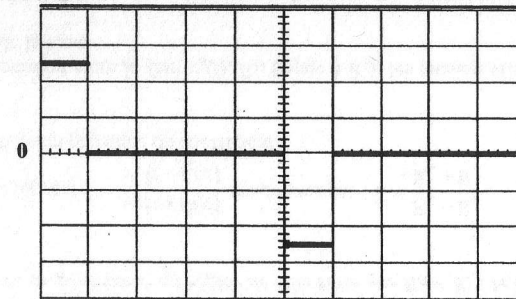
L'oscilloscope est réglé avec une base de temps de 100 ns/div et une échelle verticale de 2V/div.

A l'aide de l'oscilloscope on relève, pour une même ligne, les deux oscillogrammes ci-après de $v(0, t)$, lors de deux mesures mettant chacune en lumière une discontinuité simple qu'on cherche à caractériser, et à localiser.

Oscillogramme n°1 :



Oscillogramme n°2 :



3.6.a. A partir de ces relevés, déterminer, en exposant clairement les arguments utilisés :

- la valeur de la résistance R_c caractéristique de la ligne ;
- la valeur de la charge R_u symbolisant la discontinuité pour chacun des oscillogrammes 1 et 2 ;
- la position, sur la ligne, de ces discontinuités, sachant que la vitesse de propagation vaut $c = 2,0 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$;
- la capacité par unité de longueur C_1 ;
- l'inductance propre par unité de longueur L_1 .

3.6.b. Pouvait-on s'attendre, au vu des résultats de la partie A, aux ordres de grandeur de ces deux derniers résultats (L_1 et C_1) ?

3.6.c. Expliquer soigneusement, de façon détaillée mais sans calcul, en quoi les graphes de $v(0,t)$ obtenus aux questions 3.4.b. et 3.5.b. permettent de retrouver facilement les oscillogrammes n°1 et n°2 ci-dessus.

Pb2 CCP BI 2008.

PROBLEME B : EFFET DE PEAU DANS DIVERS DOMAINES

L'effet de peau se rencontre en physique lorsqu'il y a absorption de l'énergie. Ce phénomène se retrouve dans des domaines très variés : électromagnétisme, diffusion thermique et mécanique des fluides visqueux par exemple.

PRELIMINAIRES

Pour cette question, σ est une conductivité électrique en $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$, η une viscosité dynamique, ρ une masse volumique, λ une conductivité thermique et c une capacité thermique massique.

B.1 Par analyse dimensionnelle, quelles sont les unités dans le système international de η , ρ , λ et c ? Vous justifierez vos résultats à partir de lois physiques très simples.

$\downarrow$
 en Pa.s. $\downarrow$
 en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}$

B.2 On note ω une pulsation en radians par seconde.

On définit les quantités $\sqrt{\frac{2}{\left(\frac{\rho c}{\lambda}\right) \omega}}$ et $\sqrt{\frac{2}{\left(\frac{\rho}{\eta}\right) \omega}}$. A quelle grandeur physique ces quantités sont-elles

homogènes ? Justifier votre réponse.

B.3 On appelle μ_0 la perméabilité magnétique du vide. En utilisant la loi d'Ohm locale et l'équation de Maxwell-Ampère, montrer que l'unité du produit $\sigma \cdot \mu_0$ est : $\text{m}^n \cdot \text{s}^p$ (m désigne l'unité du mètre et s l'unité de la seconde) où l'on donnera les valeurs numériques des entiers relatifs n et p . Etablir alors une longueur possible (notée δ) en fonction de μ_0 , σ et ω .

B.4 Soit l'équation différentielle suivante $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2i\alpha^2 y(x) = 0$ où $i^2 = -1$ et α un réel positif.

Montrer que les solutions de cette équation sont de la forme $y(x) = Ae^{(1+i)\alpha x} + Be^{-(1+i)\alpha x}$. On pourra se servir de ce résultat pour la suite du problème.

EFFET DE PEAU EN ELECTROMAGNETISME

On considère un fil de cuivre cylindrique de rayon R et de longueur L très grande devant le rayon R .

Ce fil est placé dans le vide. On note σ_0 sa conductivité électrique supposée constante. On appelle

(Oz) l'axe du fil de vecteur unitaire $\vec{e}_z$.

On prendra $\sigma_0 = 6,2 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$; $\epsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

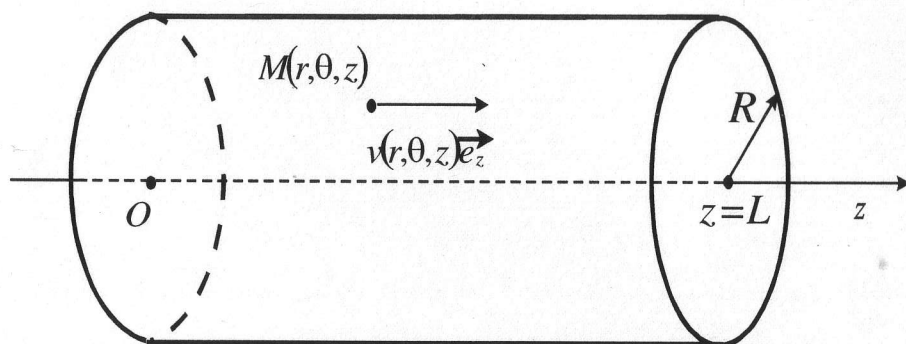


Figure 1 : géométrie du fil de cuivre

- B.5** On applique une différence de potentiel U constante entre les deux extrémités du fil de cuivre. En supposant que le champ électrique créé dans le cuivre est uniforme, donner l'expression littérale de la norme J du vecteur densité volumique de courant en fonction de σ_0 , U et L .
- B.6** Calculer alors l'intensité du courant traversant le fil de cuivre et en déduire l'expression littérale de la résistance électrique R_{elec} de ce fil de cuivre.
Application numérique : calculer la résistance linéique R_{lin} de ce fil de section $2,5 \text{ mm}^2$.
- B.7** Dans la suite du problème, un courant sinusoïdal d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ traverse le fil de cuivre. La fréquence du courant est inférieure au térahertz ($1 \text{ THz} = 10^{12} \text{ Hz}$). Montrer que l'on peut alors négliger le courant de déplacement dans l'équation de Maxwell-Ampère.
- B.8** Etablir que le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ satisfait à l'équation différentielle suivante : $\Delta \vec{j} = \xi \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$ où l'on exprimera ξ en fonction des données du problème.
- B.9** Les symétries du problème permettent d'écrire le vecteur densité volumique de courant sous la forme complexe $\vec{j} = J_0(r) \cdot e^{i\omega t} \vec{e}_z$ où $i^2 = -1$ et r est la distance d'un point M du fil par rapport à l'axe. On rappelle que $\vec{e}_z$ est le vecteur unitaire de l'axe (Oz). L'expression de l'opérateur laplacien en coordonnées cylindriques est donnée à la fin du sujet. Etablir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $J_0(r)$. On introduira la quantité $\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma_0 \mu_0 \omega}}$.
- B.10** Calculer δ à la fréquence de 1 GHz. Comparer cette grandeur au rayon du fil de cuivre de section $2,5 \text{ mm}^2$.

- B.11** La résolution de l'équation différentielle obtenue à la question **B.9** n'est pas demandée ici. On admettra donc que la densité de courant diminue lorsque l'on se rapproche de l'axe du cylindre (le rayon r diminue donc). La distance caractéristique sur laquelle se réalise cette décroissance est naturellement δ . On propose donc le modèle suivant : la conductivité électrique est une fonction exponentielle de la distance r : $\sigma(r) = \sigma_0 \cdot e^{\frac{r-R}{\delta}}$. Tracer l'allure de la fonction $\sigma(r)$. Tracer la tangente à la courbe en $r = R$. Quelle est l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses ?
- B.12** Justifier le fait que, en haute fréquence, on utilise des câbles formés de multiples brins de cuivre très fins isolés électriquement les uns des autres (appelés fils de Litz). Justifier aussi le fait que l'on recouvre les conducteurs en cuivre des circuits imprimés d'ordinateurs d'une mince pellicule d'argent.
- B.13** On se propose maintenant de calculer la résistance du fil avec le modèle de conductivité variable. On découpe la section circulaire du fil de cuivre en éléments de surface annulaires de largeur dr et de longueur $2\pi r$. On découpe ainsi le fil en éléments de volume.

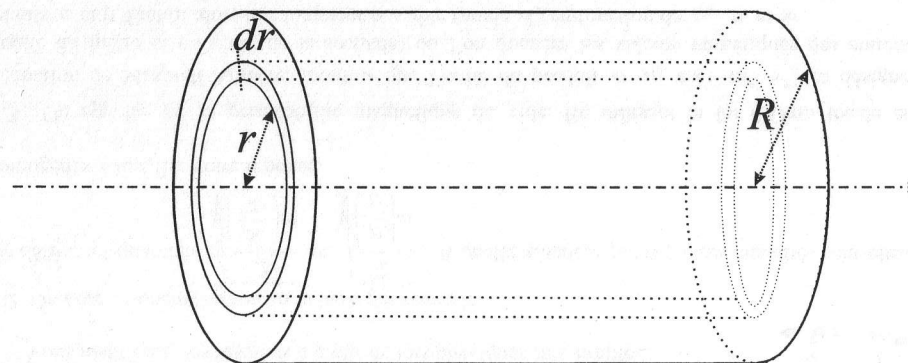


Figure 2 : découpage en volumes élémentaires

Quelle est la conductance électrique élémentaire dG d'un tel élément de volume ? On l'exprimera en fonction de r , $\sigma(r)$, dr et L .

- B.14** Comment sont branchés entre eux ces éléments de volume ? En déduire la conductance totale G du fil en fonction de δ , R , L , σ_0 .