Pb1 CCP-PC-2005

DM n°4 φ EVH / PC / 09-10 pour le mardi 1er décembre en matinée.

(1)

PROBLEME II - TABLE A INDUCTION

- Le chauffage du fond métallique (plaque circulaire) *des récipients de cuisson peut être directement réalisé au moyen de courants de Foucault induits par un champ magnétique variable.*
- Logé dans une table en céramique, un bobinage (inducteur) *alimenté en courant sinusoïdal génère ce champ. Le transfert d'énergie électrique s'effectue par induction mutuelle entre ce bobinage et la plaque circulaire assimilable à une spire unique fermée sur elle-même.*
- Dans le domaine de la cuisson, il s'agit de créer une forte dissipation Joule dans le fond des récipients tout en limitant au plus bas l'échauffement de l'inducteur. Pour atteindre cet objectif un choix s'impose quant aux propriétés du métal à chauffer.

Avertissements :

a) Ce problème conduit à comparer le comportement d'un fond en acier amagnétique à celui d'un fond en acier magnétique, **cependant aucune connaissance des milieux magnétiques n'est nécessaire.** Les comparaisons seront abordées tout simplement en utilisant les valeurs des perméabilités magnétiques relatives μ_r données ci-après, sachant que la perméabilité magnétique du vide $\mu_o = 4\pi\ 10^{-7}$ H.m^{-1} doit être systématiquement remplacée par la perméabilité magnétique absolue du métal : $\mu = \mu_o * \mu_r$

b) On tiendra compte aussi du fait que la conductivité électrique γ des deux métaux considérés n'est pas la même. Les données sont :
- pour l'acier amagnétique : $\mu_r = 1$ et $\gamma = 10^6$ S.m^{-1}
- pour l'acier magnétique : $\mu_r = 350$ et $\gamma = 5.\ 10^6$ S.m^{-1}

c) La permittivité du vide sera prise égale à $\varepsilon_o = 1/(36\pi\ 10^9)$ F.m^{-1}

d) L'expression donnée ci-après du laplacien vectoriel d'un vecteur $\vec{j}$, pourra être utilisée sans démonstration :

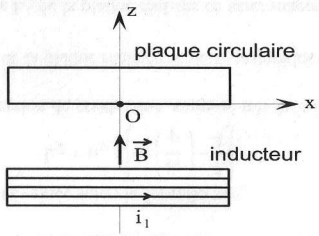
$$\Delta \vec{j} = \overrightarrow{grad}\left[div\ \vec{j} \right] - \overrightarrow{rot}\left[\overrightarrow{rot}\ \vec{j} \right]$$

e) On désignera par **i** le nombre complexe de module unité et d'argument $\pi/2$ et à toute grandeur harmonique de pulsation ω : $a(M,t) = a(M)\ cos[\omega t + \phi(M)]$ on associera le nombre complexe $\underline{a}(M,t) = \underline{A}(M)\ exp[\mathbf{i}\ \omega t]$ où $\underline{A}(M)$ représente l'amplitude complexe $\underline{A}(M) = a(M)\ exp[\mathbf{i}\ \phi(M)]$.

(2)

1) Courants de Foucault - Effet de peau.

Un inducteur alimenté par un courant i_1 génère un champ magnétique $\vec{B}$ sinusoïdal de fréquence compatible avec l'approximation des régimes quasi stationnaires (A.R.Q.S.). Ce champ est globalement orienté suivant un axe Oz (Figure 1) autour duquel il conserve une symétrie de révolution. Il agit sur un disque métallique coaxial dont la face en regard vers l'inducteur est centrée en O.



[Fig. 1]

1.1 - Exprimer la loi qui permet de prévoir globalement le sens de rotation des courants induits dans la plaque circulaire. Préciser celui-ci. Quelle est la fréquence des courants induits ?

1.2 - Pour modéliser ces courants, on recherche une solution conforme aux équations de Maxwell et compatible avec l'hypothèse de charges mobiles entraînées en rotation autour de l'axe Oz, avec une vitesse angulaire $\Omega(z)$, uniforme dans chaque section droite de la plaque circulaire.
Toute l'étude se fera en coordonnées cartésiennes dans le référentiel orthonormé Oxyz, l'axe Oy non représenté sur la figure 1 étant orienté normalement au plan du dessin, vers l'arrière.

1.2.1. Exprimer la vitesse linéaire $\vec{v}$ des charges électriques en un point M(x,y,z) du disque, sous forme d'un produit vectoriel fonction du rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ et du vecteur axial $\vec{\Omega}(z)$ représentant la vitesse de rotation, orienté selon Oz.

1.2.2. En déduire les composantes j_x et j_y de la densité de courant $\vec{j}$ en fonction du nombre n de charges élémentaires e mobiles par unité de volume, de la vitesse angulaire $\Omega(z)$ et des coordonnées du point M.

1.2.3. Calculer les dérivées partielles : $\frac{\partial^2 j_x}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 j_x}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 j_y}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 j_y}{\partial y^2}$

1.3 - Equations de Maxwell
1.3.1. Exprimer la loi d'Ohm locale pour un métal de conductivité γ.
1.3.2. Ecrire les équations de Maxwell pour un métal de perméabilité absolue μ.

Tournez la page S.V.P.

1.3.3. A partir de ces équations de Maxwell, retrouver l'équation locale de conservation de la charge.

1.3.4. Si les conditions initiales étaient telles qu'une densité volumique de charges ρ_o soit présente à l'instant $t = 0$, montrer qu'elle disparaîtrait en un temps très court. Evaluer ce temps et conclure qu'en régime établi, le conducteur reste globalement neutre en tout point de son volume. Donner l'expression simplifiée de l'équation de Maxwell-Gauss.

1.3.5. Montrer que, lorsque la fréquence imposée est égale à 25 kHz, les courants de déplacement sont tout à fait négligeables devant les courants de conduction. Dans ce cas, donner l'expression simplifiée de l'équation de Maxwell-Ampère.

1.3.6. Réécrire les équations de Maxwell ainsi obtenues, en utilisant la notation complexe pour les dérivations en fonction du temps. En déduire une relation exprimant la proportionnalité entre la densité de courant $\vec{j}$ et son laplacien vectoriel $\Delta \vec{j}$.

1.4 - On recherche pour les composantes j_x et j_y de la densité volumique de courant, des expressions complexes qui puissent s'écrire : $\underline{J}_x(z)\, exp[\mathbf{i}\,\omega\, t]$ et $\underline{J}_y(z)\, exp[\mathbf{i}\,\omega\, t]$.
Monter alors, en utilisant les résultats obtenus en 1.2.3, que ces expressions sont régies par des équations différentielles de la forme :

$$\frac{d^2\underline{J}_x}{dz^2} = f(\underline{J}_x) \qquad [1] \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2\underline{J}_y}{dz^2} = f(\underline{J}_y) \qquad [2]$$

1.5 - Résoudre ces équations et écrire l'expression générale des amplitudes complexes $\underline{J}_x$ et $\underline{J}_y$ en faisant apparaître, dans chaque cas, les deux constantes d'intégration.

1.6 - Introduire une grandeur δ homogène à une longueur et caractéristique de l'atténuation suivant l'axe Oz. Quel nom donne-t-on habituellement à cette grandeur ? Montrer qu'elle peut s'écrire :

$$\delta \approx \frac{503{,}3}{\sqrt{\gamma \mu_r f}}$$

1.7 - L'inducteur est alimenté par un générateur délivrant une fréquence $f = 25$ kHz.
La plaque a une épaisseur égale à 1 cm.
a) Calculer la profondeur de pénétration des courants dans les deux cas, acier amagnétique puis acier magnétique, compte tenu des valeurs numériques données en début de problème.
b) Justifier que, malgré la petitesse de son épaisseur, l'on puisse considérer la plaque comme illimitée en z.
c) Simplifier alors les expressions de $\underline{J}_x$ et de $\underline{J}_y$.

1.8 - Donner en notation réelle l'expression de la norme du vecteur densité de courant $\vec{j}(z)$.
On désignera par J_o son amplitude en $z = 0$.

2) Transfert d'énergie électrique par mutuelle induction

2.1 Caractérisation de l'inducteur

L'inducteur, dont le rayon extérieur mesure 10 cm, comporte 20 spires. Pour des raisons techniques, elles sont généralement enroulées en spirale. Cependant, on considérera ici qu'il est équivalent à un bobinage ordinaire, chaque spire ayant un rayon moyen égal à $r = 5$ cm . Le fil électrique dont le rayon mesure 2 mm est réalisé avec du cuivre multibrins (fils de Litz) de manière à rendre négligeable l'influence de l'effet de peau. On considérera que la section de cuivre est égale à la moitié de la section du fil.

2.1.1. - Calculer la résistance R_1 de l'inducteur sachant que le fil de cuivre utilisé a une conductivité égale à $\gamma_1 = 55{,}5\ 10^6\ S.m^{-1}$.

2.1.2. - L'inducteur, alimenté loin de la plaque, sous une tension efficace de 24 volts, à la fréquence de 25 kHz, est traversé par un courant de valeur efficace égale à 5,1 A. Exprimer littéralement son auto-inductance L_1 puis en donner la valeur numérique.

2.2 Caractérisation de la plaque (induit)

La plaque de résistance R_2 et d'auto-inductance L_2 , a un rayon égal à 10 cm et une épaisseur égale à 1 cm. Elle peut être assimilée à une spire unique refermée sur elle-même ayant pour rayon la moitié de la valeur précédente soit $r = 5$ cm et une section de conduction circulaire d'aire S égale à la section de passage des courants induits dans l'épaisseur de peau du disque soit $S = 2r\delta$.

L'auto-inductance de la spire est évaluée selon la formule :

$$L_2 = \mu_o\, r \left[ln\left(\frac{8r}{\rho}\right) - \frac{7}{4} \right]$$

où ρ représente le rayon de la section de conduction, supposé très inférieur à r.

2.2.1. Calculer la résistance R_2 de la plaque réalisée en acier magnétique.

2.2.2. Calculer l'auto-inductance L_2 de la plaque réalisée en acier magnétique.

2.2.3. Montrer que pour la fréquence utilisée (25 kHz), l'on peut négliger $(R_2)^2$ devant $(L_2\,\omega)^2$ avec une erreur inférieure à 5%.
Par la suite, tous les calculs numériques seront à effectuer dans le cadre de cette approximation.

Tournez la page S.V.P.

2.3 - L'inducteur est alimenté sous une tension $v_1(t)$. Sachant que l'ensemble inducteur-plaque se comporte comme deux circuits couplés par une mutuelle inductance M :
a) Ecrire sans approximation les équations temporelles de couplage entre le courant $i_1(t)$ circulant dans l'inducteur et le courant $i_2(t)$ parcourant la plaque (Figure 2).

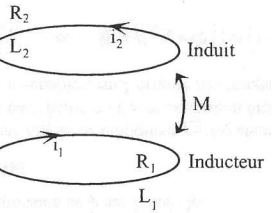


Fig. 2

b) En déduire l'expression littérale du rapport des amplitudes complexes $\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}$

c) En déduire aussi l'expression littérale de l'impédance d'entrée complexe $\underline{Z}_e = \frac{\underline{V}_1}{\underline{I}_1}$ du système.

2.4 - Simplifier les expressions ci-dessus (2.3.b et 2.3.c) puis effectuer le calcul numérique de leur module, sachant que l'inductance mutuelle est estimée à $M = 2\ \mu H$.

3) Influence de la nature du matériau formant la plaque.

3.1.- *Pour des raisons de sécurité, on se fixe comme objectif de limiter les pertes par effet Joule dans l'inducteur à 50 watts.* Quelle est alors la valeur efficace du courant maximal admissible dans l'inducteur ?
En déduire la valeur efficace maximale de la tension d'alimentation, l'intensité du courant dans la plaque et la puissance de chauffe développée dans celle-ci.

3.2 - Lorsqu'on reprend les mêmes calculs, précisés avec les données de l'acier amagnétique, on trouve que : $R_2 \approx 1\ m\Omega$, $I_2/I_1 \approx 16,5$ et $Z_e \approx 0,56\ \Omega$, les impédances ayant baissé à cause de l'épaisseur de peau plus grande.
Reprendre la question précédente 3.1 et montrer qu'utiliser l'acier amagnétique revient à diminuer nettement la puissance de chauffe de la plaque, malgré une très nette augmentation du courant dans celle-ci.

3.3 - La tension d'alimentation est réglée à $V_1 = 110$ volts, valeur efficace proche du maximum toléré, en vue de recevoir une plaque en acier magnétique. Dans le cas où un utilisateur déposerait sur la table un récipient en acier amagnétique, montrer qu'il existe un risque d'échauffement excessif de l'inducteur. Proposer une solution pour éviter tout accident de ce type.

Fin de l'énoncé

Pb2 Mines-Ponts - PC - 2009

III. — Diffusion atmosphérique

La diffusion du rayonnement solaire par les molécules de l'atmosphère terrestre, responsable notamment de la couleur bleue du ciel, intervient dans la formation du rayon vert.

III.A. — Moment dipolaire induit

En l'absence d'onde électromagnétique, le barycentre A du cortège ou *nuage* électronique supposé indéformable, d'une molécule constituant l'air, coïncide avec le barycentre O des charges positives des noyaux (molécules non polaires). Dans le référentiel d'étude $\mathscr{R}$ que l'on supposera galiléen et auquel on associe un repère cartésien $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, le mouvement du nuage se réduit à celui du point matériel A, de masse m et de charge $q < 0$ respectivement égales à la somme des masses et des charges des électrons du cortège. On désigne par x, y et z les coordonnées de A dans le repère de la figure 5. On note r la distance radiale à l'origine O, φ la longitude et θ la co-latitude du système de coordonnées sphériques, dont la base locale est $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$.

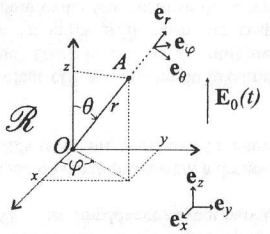


FIG. 5 – Référentiel du dipole

L'interaction de A avec le reste de la molécule est modélisée par une force élastique de rappel $\mathbf{F}_r = -m\omega_0^2\mathbf{r}$ où $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$, et par une force de frottement visqueux $\mathbf{F}_v = -\alpha d\mathbf{r}/dt$; ω_0 et α sont deux constantes. Le rayonnement solaire auquel est soumis A, est assimilé à une onde électromagnétique plane de longueur d'onde λ dont le champ électrique $\mathbf{E}_0(t) = E_m \cos(\omega t)\mathbf{e}_z$ est uniforme à l'échelle de la molécule. On suppose que E_m et $\omega = 2\pi c/\lambda$ sont indépendants du temps et de l'espace ; c désigne la vitesse de la lumière.

❑ **15** — Pourquoi le mouvement des noyaux des molécules est-il négligeable ? Pourquoi peut-on négliger la force magnétique ? Quelle condition faut-il réaliser sur la fréquence f de l'onde électromagnétique pour pouvoir supposer l'uniformité du champ $\mathbf{E}_0$ à l'échelle de distance a de vibration de la molécule ?

❑ **16** — On se place dans le cadre des approximations de la question 15. Déterminer, en régime établi (id. permanent), l'amplitude complexe $\underline{z_0}$ de la cote de A : $z(t) = \Re e\{\underline{z_0}\exp(j\omega t)\}$ où $j^2 = -1$. On définit le moment dipolaire de la molécule par $\mathbf{p} = q\mathbf{r}$. Calculer, en fonction de m, q, ω_0, ω, E_m et $\tau_e = m/\alpha$, l'amplitude complexe $\underline{p_{z_0}}$ de la composante de $\mathbf{p}$ sur l'axe $O\mathbf{e}_z$.

III.B. — Champ rayonné par un dipôle

On démontre qu'un dipôle oscillant de moment dipolaire complexe $\underline{p_0}$ rayonne une onde électromagnétique dont l'expression des champs, dans une région où l'approximation dipolaire est satisfaite, s'écrit en notation complexe et en choisissant convenablement l'origine des temps :

$$\underline{\mathbf{E}} = (\underline{E_r}\mathbf{e}_r + \underline{E_\theta}\mathbf{e}_\theta)\exp\left[j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{B}} = \underline{B_\varphi}\mathbf{e}_\varphi \exp\left[j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$$

avec :

$$\underline{E_r} = \frac{2\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{j\omega}{r^2 c}\right)|\underline{p_0}| \qquad \underline{E_\theta} = \frac{\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{j\omega}{r^2 c} - \frac{\omega^2}{rc^2}\right)|\underline{p_0}|$$

$$\underline{B_\varphi} = \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi}\left(-\frac{j\omega}{r^2} - \frac{\omega^2}{rc}\right)|\underline{p_0}|$$

ε_0 et μ_0 désignant respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du vide.

❑ **17** — Qu'est-ce que l'approximation dipolaire ? On s'intéresse au rayonnement en champ *lointain*, c'est-à-dire dans une région où $r \gg \lambda$. Que deviennent les expressions précédentes du champ électromagnétique en négligeant les termes du second ordre en λ/r ? Montrer qu'en champ lointain, la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\mathbf{R}$ s'écrit :

$$\langle \mathbf{R} \rangle = C_0 \frac{\omega^4 \sin^2\theta}{r^2}|\underline{p_0}|^2 \mathbf{e}_r$$

où C_0 est une constante que l'on déterminera.

❑ **18** — En déduire la puissance moyenne totale $\langle P_t \rangle$ rayonnée à travers une sphère de rayon $r_0 \gg \lambda$ centrée sur le dipôle. On exprimera $\langle P_t \rangle$ en fonction de ω, $|p_0|$, ε_0 et c.

III.C. — Puissance diffusée dans le visible

❑ **19** — Pour des fréquences situées dans le domaine du visible $\omega \ll \omega_0$, on peut considérer de plus que $\omega_0\tau_e \gg 1$. Exprimer la puissance moyenne totale diffusée par une molécule de l'atmosphère en fonction de ω, q, m, E_m, ω_0, ε_0 et c.

❑ **20** — Expliquer pourquoi le Soleil prend une teinte rougeâtre sur l'horizon.

FIN DE LA PARTIE III