

DM n° 64

EM/PC/O3-6

P1

CCP 07

Les calculatrices sont autorisées

Les deux problèmes sont indépendants et ont sensiblement le même poids.

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction ; si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PROBLÈME I - FENTES D'YOUNG

Ce problème étudie, à l'aide d'un goniomètre, les interférences produites à l'infini entre les deux faisceaux de lumière diffractés par une bifente d'Young. Une représentation de l'intensité lumineuse en fonction de la direction de diffraction, appelée indicatrice d'intensité, permet d'analyser l'influence de la largeur de ces fentes. Dans une deuxième partie, une méthode de mesure de l'indice de l'air est proposée, utilisant des compensateurs à prismes réglables. Globalement, en incluant les questions annexes, l'ensemble est composé de cinq parties indépendantes.

1) Questions préliminaires

Les réponses attendues doivent être brèves et données sans démonstration :

- 1.1) Expliquer en quoi le phénomène de diffraction s'écarte de l'optique géométrique.
- 1.2) Énoncer le principe d'Huygens-Fresnel en différenciant les contributions de chaque savant.
- 1.3) La diffraction à l'infini exige quelques conditions pour être observée. Préciser lesquelles.
- 1.4) Rappeler les conditions d'obtention d'un phénomène d'interférences lumineuses à deux ondes. Comment obtient-on en pratique deux sources lumineuses obéissant à ces conditions ?

2) Réglage du goniomètre

L'appareillage utilisé (Figure 1) comporte :

- a) Une lampe spectrale.
- b) Un collimateur dont la fente d'entrée F est accolée à la lampe spectrale et dont l'optique est réglable au moyen d'une lentille mobile $L1$.
- c) Une lunette de visée, autocollimatrice, possédant un réticule fixe R , un oculaire assimilable à une lentille mobile $L3$ et un objectif à tirage réglable, assimilable à une lentille mobile $L2$.

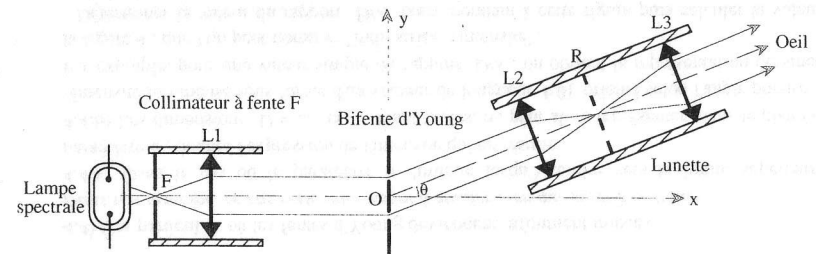


Figure 1

Dans un premier temps, on veut régler le système pour avoir à la fois une source lumineuse à l'infini et une lunette afocale pour une visée à l'infini. Pour ce faire, on dispose d'un miroir plan auxiliaire que l'on peut, lorsque nécessaire, poser sur le plateau du goniomètre.

- Décrire le processus de mise au point en précisant l'ordre chronologique du déplacement des trois lentilles.

3) Observation du faisceau diffracté par une fente très fine

L'observation des franges d'Young au goniomètre doit se faire avec des fentes bien parallèles à l'axe de rotation de l'appareil. On se limitera ici à démontrer que pour un ensemble de sources ponctuelles, monochromatiques, de même longueur d'onde, cohérentes et en phase, réparties de manière continue le long d'une droite, l'émission ne peut s'observer que dans une direction normale à cette droite. Pour ce faire, il conviendra de suivre la démarche proposée ci-après.

3.1) Cas d'un segment de droite

Une infinité de sources lumineuses infinitésimales se trouvent réparties de manière continue sur un segment de droite [Figure 2] de longueur h dont les extrémités sont positionnées, selon un repère cartésien orthonormé (O, x, y, z) , en $C_1(0, 0, h/2)$ et $C_2(0, 0, -h/2)$.

On admettra qu'en tout point $C(0, 0, z)$ de ce segment existe une source quasi ponctuelle de longueur infiniment petite dz . Toutes ces sources, *continuellement en phase*, rayonnent dans le vide une même lumière monochromatique de longueur d'onde λ .

Dans ce qui suit, on se limitera à l'étude des interférences à l'infini de tous les rayons possédant une même direction d'angle β par rapport à l'axe Oz et situés dans un même plan contenant cet axe (plan de figure). Chaque source est *caractérisable à l'infini* par une amplitude complexe :

$$ds = A_0 \exp(j\Psi) dz$$

Le nombre complexe de module unité et d'argument $\pi/2$ est noté j .

La phase Ψ , liée à l'angle β et à la position z du point C , sera référencée par rapport à la phase de la source située en O , laquelle phase sera considérée comme nulle à l'infini.

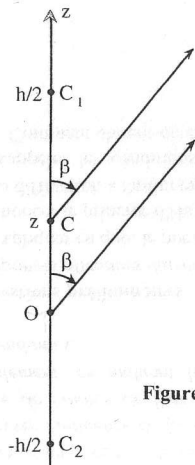


Figure 2

3.1.a) Exprimer, en fonction de z et de β , la différence de marche δ_m avec laquelle s'accompagnent jusqu'à l'infini le rayon issu du point courant C positionné à la côte z et le rayon issu de l'origine des coordonnées O . En déduire le déphasage Ψ correspondant.

3.1.b) En sommant toutes les vibrations lumineuses diffractées dans la direction β , démontrer que l'amplitude résultante peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{S} = A_0 \frac{\sin \left[\pi \frac{h}{\lambda} \cos \beta \right]}{\pi \frac{1}{\lambda} \cos \beta}$$

3.1.c) Dans le cas particulier où $\beta = \pi/2$ calculer la limite S_0 de l'expression $\underline{S}$ précédente puis exprimer $\underline{S}$ en éliminant A_0 au profit de S_0 et de h .

3.2) Cas de la droite infinie

Pour obtenir l'amplitude résultante dans le cas d'une droite infinie, il suffit de reprendre le résultat précédent en faisant tendre le rapport h/λ vers l'infini.

- Expliquer alors pourquoi, en valeur relative par rapport à l'amplitude S_0 dans la direction strictement normale à la droite Oz , cette amplitude $\underline{S}$ peut être considérée comme nulle dans toutes les directions β différentes de $\pi/2$.
- Si l'on se satisfaisait d'un rapport $h/\lambda \approx 2000$, quel serait, dans le domaine visible, l'ordre de grandeur de la hauteur de fente suffisante ?

4) Bifente d'Young

- Le plateau du goniomètre (Figures 1 et 3) est situé dans le plan (xOy) d'un repère cartésien orthonormé (O, x, y, z) et a pour axe Oz .
- Le plan (yOz) est occupé par un écran dans lequel sont ouvertes deux fentes orientées parallèlement à l'axe Oz . L'intersection de la première ouverture avec le plan (xOy) correspond au segment de droite situé entre les points d'ordonnées a et b . Celle de la seconde, symétrique de celle de la première, est située entre les points d'ordonnées $-a$ et $-b$.
- Le collimateur, muni d'un filtre, envoie vers les fentes, normalement à celles-ci, un faisceau de lumière parallèle, monochromatique et cohérent.
- La lumière diffractée par les fentes, dans une direction d'angle θ par rapport au plan zOx , est observée à l'aide de la lunette autocollimatrice, pour être focalisée sur la rétine de l'œil.

4.1) Exprimer, dans un même plan normal aux faisceaux observés (Figure 3), la différence de marche δ , entre le rayon diffracté sous l'angle θ , issu de la fente au point courant $M(0, y, 0)$ et un rayon hypothétique (pris pour référence de phase) issu du point O sous le même angle θ .

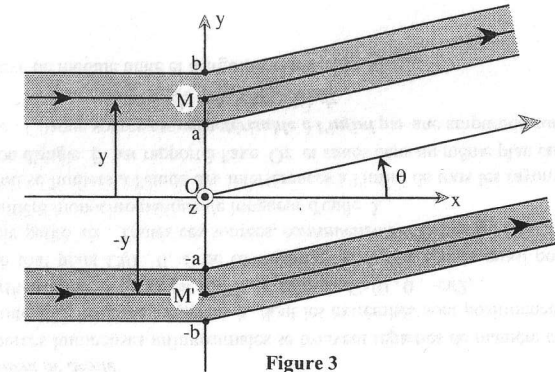


Figure 3

4.2) Exprimer en fonction de la longueur d'onde λ de la lumière dans l'air, de l'ordonnée y et de l'angle θ , le déphasage ϕ du rayon issu de M par rapport au rayon de référence.

4.3) La vibration lumineuse issue d'un point $M(0, y, 0)$, répartie sur une largeur dy , peut être caractérisée à l'infini par une amplitude scalaire complexe telle que $d\mathcal{S} = A_0 \exp(j\phi) dy$ tandis que la vibration de même direction θ issue du point symétrique $M'(0, -y, 0)$ peut s'écrire : $d\mathcal{S}' = A_0 \exp(-j\phi) dy$. Exprimer, à l'aide d'une fonction trigonométrique réelle simple, la vibration résultante $d\mathcal{S} = d\mathcal{S} + d\mathcal{S}'$.

- Pour sommer l'ensemble des rayons lumineux issus des deux fentes, dans la direction θ , il suffit alors de calculer l'intégrale de $d\mathcal{S}$ depuis la borne $y = a$ jusqu'à la borne $y = b$. Effectuer ce calcul puis en déduire l'intensité lumineuse résultante I .
- Exprimer I en fonction de la largeur des fentes $d = b - a$, de leur écartement $D = b + a$, de l'angle d'observation θ et du paramètre $I_0 = 4(A_0 d)^2$.

Rappel : $\sin p - \sin q = 2 \sin \{(p-q)/2\} \cos \{(p+q)/2\}$.

4.4) Cas particulier où les fentes d'Young deviennent infiniment minces :

Dans son principe, ce cas reste intéressant à étudier bien que sujet à critiques.

4.4.a) Dans le cas où le paramètre b diminue jusqu'à tendre vers la limite supérieure du paramètre a , donner l'expression de l'intensité qui en résulte.

4.4.b) Les dimensions $D = 2a$ et λ étant fixées, on peut alors représenter, dans le plan (xOy) , l'intensité lumineuse sous forme d'un vecteur de longueur $I(\theta)$ orienté selon l'angle polaire θ . Par exemple, pour une valeur simple du rapport D/λ , on obtient la représentation dessinée sur la figure 4, que l'on peut nommer "indicatrice d'intensité".

- Déterminer la valeur du rapport D/λ correspondant à cette figure puis calculer la valeur θ_1 de l'angle polaire correspondant à la zone sombre la plus voisine de l'axe Ox .
- Calculer la valeur θ_2 de l'angle polaire immédiatement supérieur à θ_1 , correspondant au maximum du lobe le plus voisin de l'axe Ox .
- Expliquer pourquoi le nombre de lobes augmente avec le rapport D/λ .

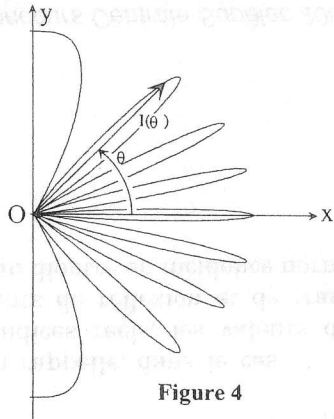


Figure 4

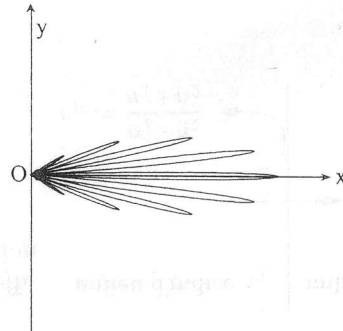


Figure 5

4.5) Cas de fentes larges vis-à-vis de la longueur d'onde λ :

Sachant que la fonction $(\sin x)/x$ devient pratiquement négligeable dès que la variable x excède π , définir la valeur maximale $\theta_{\max}$ de l'angle d'observation θ en limite de netteté.

Exprimer la largeur angulaire $\Delta\theta = 2\theta_{\max}$ de la tache centrale de diffraction, en fonction de la longueur d'onde λ et de la largeur d de chaque fente. Expliquer pourquoi, lorsque les fentes sont élargies, la zone d'observation $\Delta\theta$ se resserre autour de l'axe Ox . Lorsque D/λ et d/λ augmentent simultanément, l'indicatrice d'intensité se déforme selon l'aspect représenté figure 5.

- Sachant que $\lambda = 633 \text{ nm}$ et qu'une mesure a donné $\Delta\theta = 0,72^\circ$, en déduire la largeur d .
- Lorsque $d/\lambda \gg 1$, le champ d'observation étant très étroit, dans l'expression de $I(\theta)$ on peut réduire $\sin \theta$ au terme du premier ordre de son développement limité en θ . En déduire l'expression de l'interfrange angulaire θ_i en fonction de λ et de D .

Préciser la valeur numérique de θ_i sachant que $D = 0,60 \text{ mm}$.

5) Mesure de l'indice de l'air

L'indice de l'air étant exprimé sous la forme $n = 1 + \epsilon$, on cherche à mesurer l'écart ϵ , très petit devant l'unité. Dans ce but, on interpose sur chacun des faisceaux atteignant les fentes, en avant de celles-ci, un tube de petit diamètre, de longueur $L = 10 \text{ cm}$, orienté parallèlement à l'axe Ox . Ces tubes sont identiques et initialement remplis d'air dans les conditions normales de température et de pression. On interpose en outre, entre chaque tube et l'écran, un compensateur de différence de marche. En sortie des compensateurs, les deux faisceaux sont repris par un système optique particulier (fibres optiques) de manière à être ramenés dans l'axe des fentes, nécessairement très rapprochées l'une de l'autre. Les compensateurs sont alors réglés de manière à retrouver la figure de diffraction initiale. On établit ensuite un vide poussé dans le tube face à l'ouverture (a,b), puis l'on modifie le réglage du compensateur aligné avec ce tube afin de ramener le système de franges en place. L'écart ϵ se déduit de cette modification.

5.1) Pendant que le vide s'établit dans ce tube, dans quel sens (trigonométrique ou horaire autour de l'axe Oz) tourne la figure de diffraction ? En donner ici une explication sommaire.

5.2) Etude d'un compensateur - Réglage et mesure

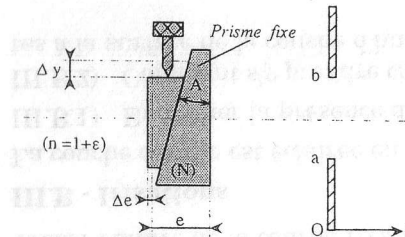


Figure 6

Deux prismes rectangles tronqués, d'indice $N = 1,6$, de même petit angle $A = 1^\circ$ sont accolés par leurs faces hypoténuses (Figure 6) de manière à constituer une lame à face parallèle d'épaisseur réglable au moyen d'un glissement Δy , perpendiculaire à l'axe optique Ox , commandé par une vis micrométrique.

L'ensemble est placé dans l'air.

5.2.a) Exprimer le rapport $\Delta e/\Delta y$ en fonction de A .

- Exprimer en fonction de N , n , A et Δy , la différence de marche compensée δ_c , c'est-à-dire la variation du chemin optique lors d'un glissement Δy .

- En négligeant ϵ dans la différence $(N-n)$, calculer δ_c sachant que le réglage, effectué une fois le vide fait, a entraîné un déplacement de la vis micrométrique $\Delta y = 2796 \mu\text{m}$.

5.2.b) En comparant les chemins optiques avant le vidage puis après les opérations de vidage et de compensations, déterminer l'expression de ϵ en fonction de L et de δ_c . En donner la valeur numérique.

5.3) Pour estimer la sensibilité sur la mesure de δ_c , les compensateurs étant ôtés, il est nécessaire de reprendre les calculs développés dans la question (4.3) de manière à tenir compte du déphasage α , introduit lors du vidage, sur le trajet passant par l'ouverture (a,b).

5.3.a) Exprimer ce déphasage α en fonction de δ_c et λ .

5.3.b) Exprimer la nouvelle vibration élémentaire résultante $dS = \underline{dS} + \underline{dS}'$ sous la forme ci-après, en précisant la valeur du coefficient K et l'expression $f(y/\lambda, \theta, \alpha)$ de l'argument du cosinus : $dS = K \exp(j\alpha/2) \cos\{f(y/\lambda, \theta, \alpha)\} dy$.

- Comme en (4.3), sommer toutes les vibrations issues des fentes dans la direction θ puis exprimer, de la même manière, la nouvelle intensité lumineuse résultante $I(\alpha)$.

5.3.c) Dans le cas où l'angle d'observation θ s'avère très petit, simplifier l'expression $I(\alpha)$.

- Comparer ce résultat avec son expression en l'absence du déphasage α .

- En déduire, en fonction de δ_c et D , l'angle de rotation Ω que le déphasage α impose à la figure de diffraction. Calculer la valeur numérique de Ω , en degrés.

5.4) Sensibilité - Influence de la température et de la pression de l'air

La précision du goniomètre est telle que le plus petit angle de rotation mesurable est égal à $(\Delta\Omega)_{\min} = 0,02^\circ$. Calculer la plus petite variation de δ_c mesurable : $(\Delta\delta_c)_{\min}$.

On peut admettre pour l'air, dans les conditions normales de température (273 K) et de pression (1013 hPa), que ϵ est inversement proportionnel à la température absolue T et proportionnel à la pression P . Préciser quel écart de température (à pression constante) puis quel écart de pression (à température constante) provoquera une variation $\Delta\delta_c$ à la limite de sensibilité du goniomètre.

III.A - En lumière monochromatique

L'onde incidente est une onde plane monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ .

III.A.1)

En incidence normale, évaluer numériquement le rapport $|E_1/E_0|$ des amplitudes des rayons (1) et (0).

III.A.2) Évaluer de même $|E_2/E_0|$, $|E_2/E_1|$ et $|E_3/E_2|$. Justifier qu'on peut désormais se limiter aux rayons réfléchis (1) et (2) uniquement.

On fait l'hypothèse que les rapports d'amplitudes précédents restent inchangés quels que soient les angles d'incidence et les polarisations des ondes considérées.

III.A.3)

a) Écrire l'intensité lumineuse réfléchie sous la forme

$$I = I_0 \left[1 + C \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) \right]$$

où C est un coefficient que l'on déterminera en fonction de $|E_2/E_1|$ et δ la différence de marche entre les rayons (1) et (2). Évaluer numériquement C . Que dire de la visibilité des franges ? Tracer l'allure de la courbe $I(\delta)/I_0$.

b) Établir l'expression

$$\delta = 2ne \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}} + \frac{\lambda}{2}.$$

c) Pour la valeur de n considérée, la valeur de $f(i) = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}$ décroît de 1 à environ 0,75 lorsque i varie de 0 à $\pi/2$.

Esquisser l'allure de la courbe $f(i)$ pour ce domaine de variation.

d) Pour $e = \lambda/10$, la fonction

$$g(i) = \frac{4\pi ne}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}$$

décroît de 40π à 30π lorsque i varie de 0 à $\pi/2$.

Tracer l'allure de la courbe $I(i)/I_0$ pour ce domaine de variation.

III.B - Irisations

La couche d'huile est éclairée en lumière blanche.

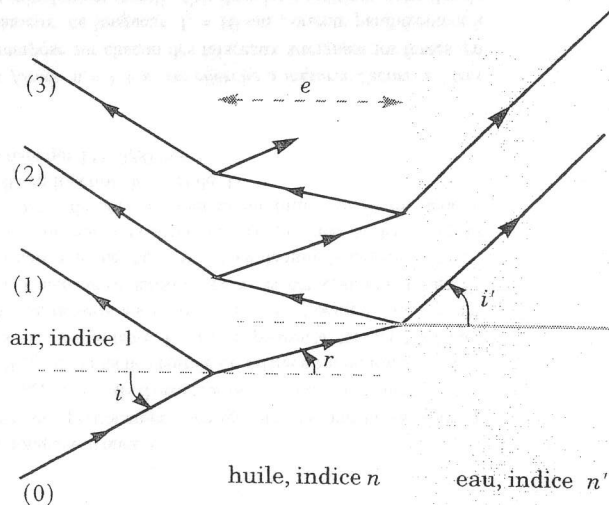
III.B.1) Expliquer la présence d'irisations.

III.B.2) Comment s'y prendre concrètement pour observer les différentes teintes à la surface de la couche d'huile ?

Pb2 Centrale 07

Partie III - Couleurs interférentielles

On s'intéresse aux couleurs engendrées en lumière blanche par une fine couche d'huile d'épaisseur e surnageant à la surface de l'eau. Les indices de l'huile et de l'eau, ici supposés réels et constants, valent respectivement $n = 1,5$ et $n' = 1,33$.



On rappelle, dans le cas d'indices réels, les valeurs des coefficients de réflexion et de transmission d'un dioptré en incidence normale :

$$\begin{aligned} \text{milieu d'indice } n_1 & \quad \text{milieu d'indice } n_2 \\ r_{12} &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\ t_{12} &= \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \end{aligned}$$

III.B.3) Donner un ordre de grandeur de la valeur maximale de l'épaisseur d'huile permettant l'observation des différentes teintes colorées. Comment nomme-t-on la couleur observée si l'épaisseur d'huile devient supérieure à cette valeur seuil ?

Partie IV - Couleurs par diffraction

On envisage un réseau par transmission constitué d'une surface plane ne laissant pas passer la lumière et percée de N fentes parallèles de largeur e et de longueur L régulièrement espacées. Elles forment ainsi un motif répété périodiquement

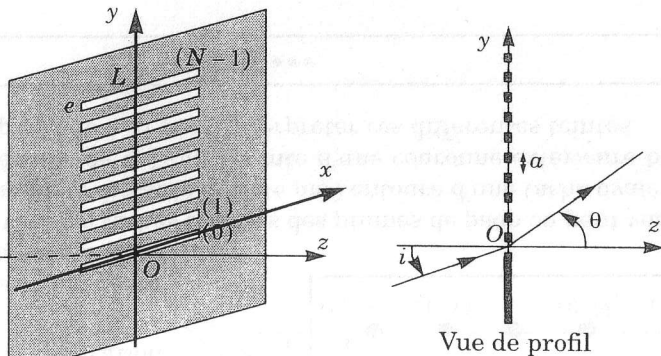
(période a). On considère que $L \gg e$ et que L est très grand devant les longueurs d'onde λ du domaine visible. L'indice de l'air est pris égal à 1.

IV.A - Seuls des faisceaux lumineux parallèles sont envisagés. La direction de la lumière incidente est contenue dans le plan (yOz) . Pourquoi peut-on considérer que la direction de la lumière diffractée est également contenue dans ce plan ?

IV.B -

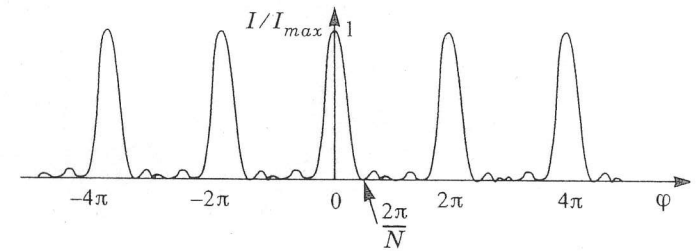
IV.B.1) On note $a_0(i, \theta, e, \lambda)$ l'amplitude diffractée par la première fente (0) dans la direction θ . Justifier que l'amplitude diffractée dans la même direction par la fente suivante (1) ne diffère de a_0 que par l'ajout d'une phase supplémentaire φ que l'on déterminera en fonction de i , θ , a et λ la longueur d'onde de la lumière incidente.

IV.B.2) On admet que l'amplitude diffractée par le réseau peut s'écrire comme le produit de l'amplitude diffractée par un unique motif (la fente (0) par exemple) et d'un terme d'interférence à N ondes, noté $\mathcal{N}(N, \varphi)$ indépendant de la nature des motifs. Montrer que l'intensité diffractée dans la direction θ par les N fentes peut s'écrire sous la forme $|a_0|^2 I(N, \varphi)$. Exprimer $I(N, \varphi)$ en fonction de $\mathcal{N}(N, \varphi)$. À quelle(s) condition(s) portant sur e peut-on considérer a_0 comme indépendante de θ et de i ? On se placera désormais dans ce cas.



IV.B.3) On donne l'allure de la courbe $I(N, \varphi)$ en fonction du déphasage φ : figure ci-contre.

Pour quelles valeurs de θ l'intensité diffractée est-elle maximale lorsque N devient grand ?



IV.C - La surface d'un disque compact est modélisée par un ensemble de miroirs parallèles identiques aux fentes précédentes :

IV.C.1) Montrer que le résultat précédent reste valable à condition de remplacer φ par une phase $\varphi'(i, \theta', a, \lambda)$ à déterminer. Pour un disque compact $a = 1,6 \mu\text{m}$. Le disque est désormais éclairé en incidence normale.

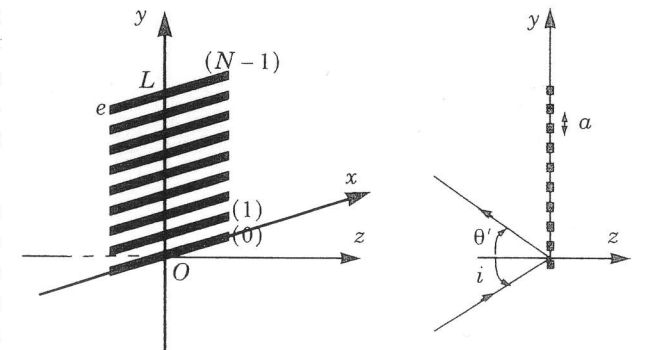
IV.C.2) Proposer un dispositif expérimental permettant d'observer la lumière diffractée dans les conditions décrites précédemment.

IV.C.3) Y a-t-il mélange des ordres en lumière blanche ?

IV.C.4) Peut-on voir son propre reflet dans un disque compact comme dans un miroir ? Les couleurs sont-elles modifiées ?

IV.D - Les barbulles des plumes de paon contiennent des bâtonnets de mélanine (pigment brun foncé qui donne sa coloration à la peau) opaques noyés dans de la kératine (protéine fibreuse transparente d'indice $n = 1,5$).

Chaque bâtonnet constitue un obstacle qui diffracte la lumière (comme les miroirs précédents). Les bâtonnets sont régulièrement répartis dans la kératine au niveau des nœuds d'un réseau cubique simple (N_x bâtonnets dans la direction x , N_y bâtonnets dans la direction y , N_z bâtonnets dans la direction z). Comme précédemment, seuls les rayons contenus dans le plan (yOz) sont pris en compte. On suppose l'amplitude diffractée indépendante de N_x : tout se passe comme si les bâtonnets avaient une longueur L dans la direction x très



supérieure à a et λ . On note a_1 l'amplitude (supposée constante) diffractée par un unique bâtonnet.

On s'intéresse à la lumière diffractée par chaque bâtonnet dans la direction $r' = -r$ de la réflexion spéculaire.

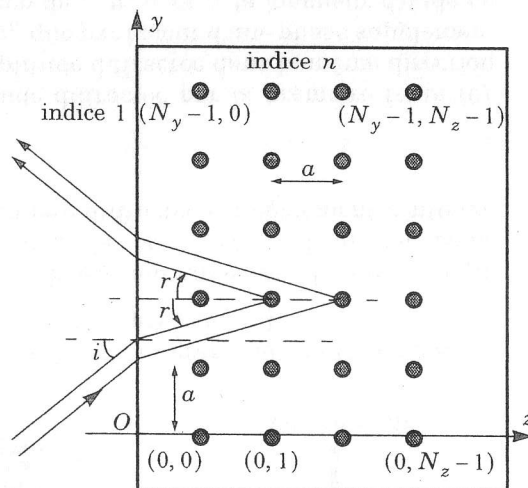
IV.D.1) Soit φ_y le déphasage entre les ondes diffractées par deux bâtonnets plus proches voisins dans la direction y et de même coordonnée z : bâtonnets (i, j) et $(i + 1, j)$. De même, φ_z est le déphasage entre les ondes diffractées par deux bâtonnets plus proches voisins dans la direction z et de même coordonnée y : bâtonnets (i, j) et $(i, j + 1)$. En utilisant le résultat donné à la question IV.B.2, montrer que l'intensité diffractée est proportionnelle à $|a_1|^2 I(N_y, \varphi_y) \cdot I(N_z, \varphi_z)$.

IV.D.2) En s'inspirant des questions IV.B.1 et IV.C.1, exprimer φ_z et φ_y en fonction de n , a , λ et i .

IV.D.3) N_y et N_z sont très grands devant 1. Dans quelle(s) direction(s) i la longueur d'onde λ est-elle préférentiellement diffractée ?

IV.D.4) Pour quelle valeur minimale de a toutes les longueurs d'onde du spectre visible sont-elles diffractées ? Application numérique.

IV.D.5) On se place en incidence normale $i = 0$. Que valent alors φ_x et φ_y ? En observant les taches colorées des plumes de paon on peut voir un centre bleu-noir (bâtonnets distants de $0,16 \mu\text{m}$) entouré d'une tache ovale turquoise (bâtonnets séparés de $0,17 \mu\text{m}$) ceinte d'une couronne extérieure brun-rouge (bâtonnets séparés de $0,21 \mu\text{m}$). Interpréter ces différentes teintes.



... FIN ...