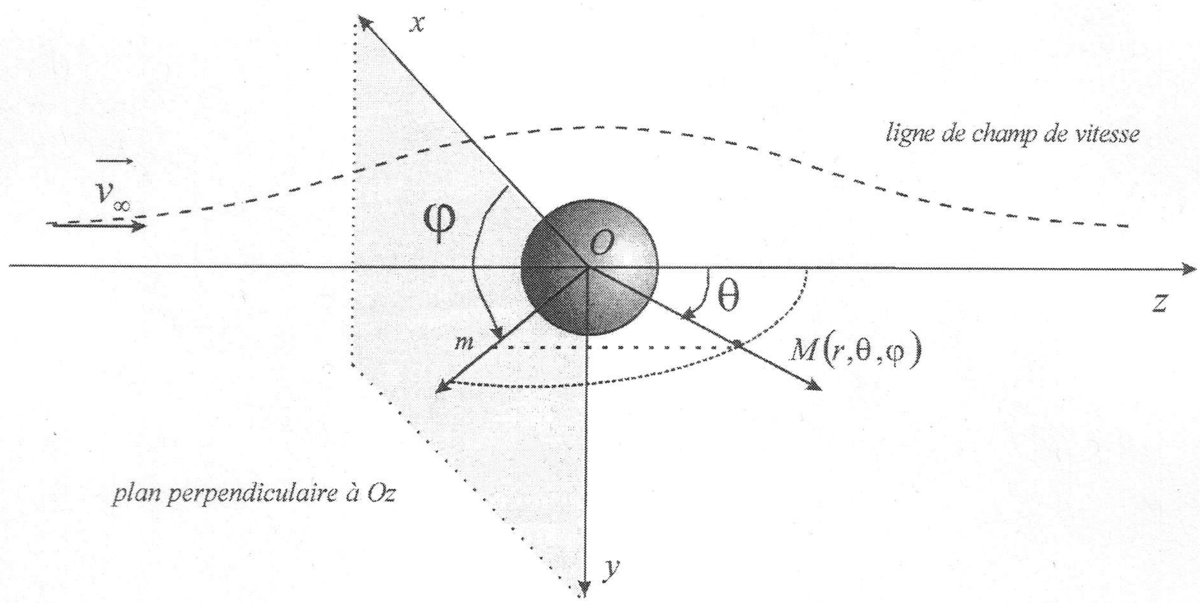
PROBLEME B : LE JEU DE JOKARI

Préambule : Ecoulement sur un obstacle – Formule de Stokes

On s'intéresse à l'écoulement d'un **fluide incompressible** de viscosité η et de masse volumique ρ autour d'une sphère de centre O de rayon R **à très faible nombre** de Reynolds $(R_e \ll 1)$. On rappelle que le nombre de Reynolds est $R_e = \dfrac{R\rho v}{\eta}$ où v est la vitesse de la sphère, ρ la masse volumique du fluide et η la viscosité. Dans ce problème, la pesanteur est négligée. On note $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ la base associée au repère (O, x, y, z).



L'angle θ est l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{e_z}$ et l'angle φ est l'angle entre $\overrightarrow{Om}$ et $\vec{e_x}$, vecteur unitaire de l'axe Ox, m étant le projeté orthogonal de M dans le plan (O,x,y).
A une distance z très grande devant R, la pression est notée p_∞, l'écoulement est uniforme et la vitesse v_∞ est parallèle à l'axe Oz : $\vec{v_\infty} = v_\infty \vec{e_z}$. Cet écoulement permanent est caractérisé dans un repère sphérique $(O, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ par un champ de vitesse $\vec{v} = \vec{v}(r,\theta,\varphi)$ et un champ de pression $p = p(r,\theta,\varphi)$ qui vérifie l'équation de Navier-Stokes,

$$\rho\left(\frac{D\vec{v}}{Dt}\right) = -\overrightarrow{grad}P + \eta\,\Delta\vec{v}$$

On rappelle que $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{A}\right) - \Delta\vec{A}$; $div\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}\right) = 0$; $div\left(\overrightarrow{grad}\,f\right) = \Delta f$

B.1 Quelle est l'unité du nombre de Reynolds R_e dans le Système International ? On justifiera par une analyse dimensionnelle.

B.2 Rappeler dans le cas général, l'équation locale de conservation de la matière.
Que devient cette relation dans le cas d'un fluide incompressible ?

B.3 En comparant les différents termes de l'équation de Navier-Stokes, montrer que cette dernière peut approximativement s'écrire $\overrightarrow{grad P} = \eta \Delta \vec{v}$.

B.4 En déduire que le laplacien de p vérifie $\Delta p = 0$.

B.5 Justifier que la pression p est indépendante de la variable φ et préciser la direction de la résultante des forces pressantes $\vec{F}$ sur la sphère.

B.6 Vérifier que $p = p_\infty - \dfrac{3}{2}\dfrac{\eta v_\infty R \cos\theta}{r^2}$ est solution de l'équation de la question **B.4.**

On rappelle qu'en coordonnées sphériques,

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right)\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial(f)}{\partial \theta}\right)\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

B.7 En déduire la résultante des forces pressantes $\overrightarrow{F_p}$. L'élément de surface sur une sphère de rayon R est $dS = R^2 \sin(\theta)\, d\theta\, d\varphi$.

B.8 Sachant que la résultante des forces visqueuses vaut $\vec{F}_v = 4\pi\eta R \overrightarrow{v_\infty}$, en déduire la force totale subie par la sphère.

Résistance à l'avancement

Considérons maintenant une sphère de vitesse v, de rayon R en mouvement uniforme dans un fluide de viscosité η et de masse volumique ρ .

B.9 On cherche à déterminer la traînée exercée sur la sphère. Cette force exercée par le fluide sur la sphère est fonction de v, R, ρ et R_e. La force de traînée peut se mettre sous la forme : $F = \frac{\pi}{2} C_x(R_e) R^\alpha v^\gamma \rho^\lambda$ où $C_x(R_e)$ représente une fonction de R_e et α, γ et λ sont des entiers naturels.

Par une analyse dimensionnelle, déterminer les nombres α, γ et λ.

B.10 Dans le cas d'un écoulement rampant, $(R_e < 1)$, nous obtenons la loi dite de Stokes : $\vec{F} = -6\pi R \eta \vec{v}$. Préciser alors la valeur de C_x en fonction de R_e.

B.11 Que devient cette force pour un fluide parfait ?

Le jeu de Jokari : étude à une dimension

Le **Jokari** est un jeu qui se joue à deux ou seul. Il est composé d'une balle en caoutchouc de masse m attachée à un socle par un élastique, permettant ainsi à la balle de revenir. On frappe la balle avec une raquette en bois. L'élastique sera assimilé à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. **L'effet de l'élastique ne se produit que si la longueur de l'élastique est supérieure à ℓ_0, c'est-à-dire l'élastique tendu.** Le socle sera placé sur le sol en un point O pris comme origine. L'étude du mouvement s'effectue dans le référentiel terrestre assimilé à un référentiel galiléen. On note $\overrightarrow{g_0}$ le champ de pesanteur terrestre supposé constant et uniforme. On désigne par (O,x,y,z) le repère orthonormé direct lié à la terre, l'axe Oz étant dirigé suivant la verticale ascendante.
On modélisera la balle par un point M.

Données et notations :

- Coordonnées du point M, (x,y,z) dans la base $(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$;
- longueur à vide, ℓ_0 ;
- masse de la balle, m ;
- raideur de l'élastique, k ;
- viscosité de l'air, $\eta = 1{,}8\cdot 10^{-5}$ Pa$\cdot$s ;
- vitesse initiale de lancement, v_0 ;
- hauteur initiale de lancement, $h = 1$ m :
- rayon de la balle en caoutchouc , $R = 2$ cm ;
- le champ de pesanteur terrestre, $\overrightarrow{g_0}$: $g_0 = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

A l'instant initial, $t = 0$, on lance la balle M avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ suivant l'axe Oz ascendant et à une hauteur $h\ (h < \ell_0)$. On néglige dans cette partie tout frottement.

B.12 Quelle doit être la vitesse minimale $v_{0,\min}$ pour que l'élastique se tende ?

Etude pour $v_0 < v_{0,\min}$

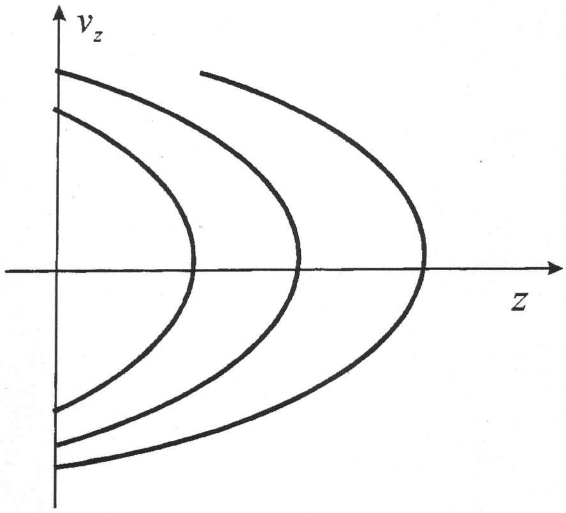
B.13 Dans l'hypothèse où $v_0 < v_{0,\min}$, donner l'expression de la vitesse $v_z(t) = dz/dt$ à un instant t donné.
En déduire la position $z(t)$. Préciser les expressions de la vitesse v_s et de l'instant t_s quand la masse touche le sol. On posera $\delta^2 = \dfrac{v_0^2}{g_0^2} + \dfrac{2h}{g_0}$.

B.14 En déduire une expression de z en fonction de v_z , v_0 et h.
Quelle est la nature de la courbe obtenue ?
Comparer cette expression à celle des courbes de niveau de l'énergie mécanique.
En déduire une autre expression de z en fonction de g_0, v_z et v_s.

B.15 L'espace des phases est un plan où l'on porte en abscisse z et en ordonnée $v_z = dz/dt$. Tracer la courbe correspondante dans l'espace des phases pour $t \in [0, t_S]$. On précisera les points remarquables.

B.16 Quand la balle touche le sol, on admet que la vitesse se transforme instantanément, en $\vec{v}(t_S^+) = +ev_s\vec{e}_z$ où e est un coefficient de restitution $0 < e < 1$.
On prend une nouvelle origine des temps et on pose $t' = t - t_s$. Exprimer la nouvelle vitesse $v_z(t')$ et la nouvelle position $z(t')$.
En déduire l'expression z en fonction de g_0, v_z, e et v_s. Comparer au résultat précédent.

B.17 On représente ci-dessous la trajectoire dans l'espace des phases après plusieurs rebonds :



Reproduire ce graphique sur la copie en y précisant le sens de parcours.
Pourquoi a-t-on des tangentes verticales sur l'axe des z ?
Par quelle propriété graphique se traduit la conservation de l'énergie ?
Quelle propriété présentent ces courbes les unes par rapport aux autres ?

B.18 **On tient compte maintenant de la force de traînée.** La résistance de l'air sur la balle de rayon R et animée d'une vitesse v se traduit par une force qui en norme vaut $f = \beta v^2$ où β est une constante. On lance toujours la balle de masse m d'une hauteur h avec une vitesse $v_0 < v_{0,\text{lim}}$ ascendante, l'élastique n'est toujours pas tendu.
Pourquoi la loi de Stokes n'est-elle pas valable ici ? On justifiera le résultat par une estimation du nombre de Reynolds R_e.

B.19 Ecrire la nouvelle équation vérifiée par v en fonction g_0, m et β.
a) dans la phase ascendante,
b) dans la phase descendante,

B.20 On pose $u = v^2$. Montrer que dans la phase ascendante $\frac{du}{dz} = -2g_0 - 2\frac{\beta}{m}u$.

Expliciter la fonction $u(z)$ en fonction de m, g_0, β, v_0, h et $d = \frac{m}{2\beta}$.

En déduire $z_{\max}$, l'altitude maximale.

B.21 Etablir l'expression dans la phase descendante.
Expliciter la fonction $u(z)$ en fonction de m, g_0, β, $z_{\max}$, d.
En déduire la vitesse v_s quand elle touche le sol à l'instant t_s.

B.22 Tracer l'allure de la trajectoire dans l'espace des phases entre $t = 0$ et $t = t_s$.

Fin du problème B

Fin de l'épreuve