DS n°3 | PC/ENV/09-10

Pb 1 E3A - PC - 2007



GX72

e3a

**CONCOURS ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE**

**Épreuve de Physique PC**

**durée 4 heures**

***Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.***

---

## L'usage de la calculatrice est autorisé

Ce problème étudie les **ondes élastiques dans les milieux solides et leurs applications dans les phénomènes sismiques**. Il est constitué de trois parties totalement indépendantes.

La première partie est consacrée aux propriétés microscopiques et macroscopiques des ondes élastiques et établit le lien entre les paramètres microscopiques régissant les interactions entre les atomes du solide et le module d'Young qui décrit le comportement élastique du solide au niveau macroscopique.

La deuxième partie s'intéresse à la propagation d'ondes élastiques longitudinales (ondes P) qui peuvent se propager à l'intérieur de la Terre après une explosion ou un séisme. L'étude de cette propagation permet d'accéder à des informations importantes concernant la structure géologique interne du globe terrestre.

Enfin, la troisième partie est focalisée sur la détection de ces ondes au moyen d'un sismographe électromagnétique. Bien que ce type d'appareil soit actuellement partiellement remplacé par des sismographes piézoélectriques, son importance historique est considérable et il fut longtemps le seul dispositif à être utilisé.

*Remarques préliminaires importantes : il est rappelé aux candidat(e)s que :*

- *les explications des phénomènes étudiés interviennent dans la notation au même titre que les développements analytiques et les applications numériques,*
- *tout au long de l'énoncé, les paragraphes en italiques ont pour objet d'aider à la compréhension du problème mais ne donnent pas lieu à des questions,*
- *tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par les candidat(e)s.*

*Dans tout le problème, le référentiel terrestre ($R_T$), supposé galiléen sera utilisé.*







# PREMIÈRE PARTIE

# ONDE ELASTIQUE DANS UN BARREAU SOLIDE

/27

## A – Modèle microscopique et approximation des milieux continus /15

*À l'échelle microscopique, un matériau solide homogène peut être modélisé par une chaîne infinie d'atomes assimilés à des points matériels de même masse m et reliés entre eux par des ressorts identiques, de longueur à vide a et de raideur K. Ces ressorts modélisent, dans l'approximation linéaire, les interactions électromagnétiques entre les atomes lorsqu'ils se déplacent au voisinage de leur position d'équilibre.*

*Considérons un modèle unidimensionnel dans lequel tous les atomes se déplacent sans frottement sur un axe Ox. La figure 1 représente cette disposition où chaque atome est numéroté par un entier n. Lorsqu'il est en équilibre mécanique, l'atome référencé (n) est situé à l'abscisse $x_n(éq) = n\,a$ ; en dehors de l'équilibre, sa position devient $x_n(t) = x_n(éq) + u_n(t)$.*

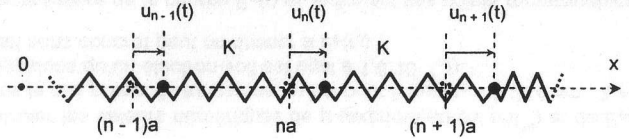


**Figure 1 : Chaîne infinie d'atomes**

1 **A1*a.** Établir l'expression de la résultante des forces exercées par les atomes (n – 1) et (n + 1) sur l'atome (n).

1 **A1*b.** En déduire l'équation différentielle du mouvement de l'atome (n) et montrer qu'elle peut s'écrire : $\dfrac{d^2u_n}{dt^2} = \omega_0^2\left(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n\right)$, en explicitant $\omega_0$ en fonction de K et m.

*L'équation précédente admet des solutions sinusoïdales de pulsation $\omega$. Afin de les étudier, introduisons la représentation complexe $\underline{u}_n(t)$ et cherchons ces solutions sous la forme $\underline{u}_n(t) = \underline{U}_n \exp(j\omega t)$ où $\underline{U}_n$ désigne l'amplitude complexe du déplacement de l'atome (n).*

0,5 **A2*a.** Établir la relation entre $\omega$, $\omega_0$, $\underline{U}_{n-1}$, $\underline{U}_n$ et $\underline{U}_{n+1}$.

1 **A2*b.** Quelle est la valeur particulière de $\omega$ associée à une solution telle que $\underline{U}_{n-1} = \underline{U}_n$ pour toute valeur de n ? Quelle interprétation physique peut-on en donner ?

0,5 **A2*c.** Déterminer de même la pulsation correspondant à $\underline{U}_n = -\underline{U}_{n-1}$ pour toute valeur de n.

*Dans toute la suite de cette partie, nous étudierons une solution particulière de la forme $\underline{u}_n(t) = \underline{A}\exp[j(\omega t - k\,na)]$ où $\underline{A}$ est un nombre complexe indépendant de n et k un nombre réel.*

1 **A3*a.** Quelle signification physique peut-on attacher à ce type de déplacement ? Quelle hypothèse fait-on en supposant que $\underline{A}$ est indépendant de n ?

2 **A3*b.** Vérifier que l'expression proposée est bien solution de l'équation établie en A1*b, à condition que k, $\omega$, $\omega_0$ et a soient reliés par une équation à expliciter.
Réaliser un schéma représentant l'évolution de $\omega$ en fonction de k. Quel est le domaine de pulsations admissibles ?

0,5 **A3*c.** Pourquoi est-il possible de restreindre les valeurs de k à l'intervalle $[-\pi/a, \pi/a[$ ?

**A3*d.** Montrer que le déplacement $u_n(t)$ reproduit exactement le déplacement $u_{n-1}(t)$, mais avec un retard temporel $\tau$ dont on donnera l'expression en fonction de $\omega_0$, k et a.
En déduire qu'il est possible de définir une vitesse de phase $V_\varphi = \omega / k$. La propagation est-elle ou non dispersive ?

*Considérons désormais le cas particulier où k est positif.*

**A4*a.** Déterminer la vitesse de phase $V_\varphi$ et la vitesse de groupe $V_g$ en fonction de $\omega_0$, k et a.

**A4*b.** Quelles sont les valeurs limites de ces deux vitesses lorsque $k \to 0$. Commenter.

**A4*c.** Étudier de même les limites lorsque $k \to \pi/a$. Quelle signification physique peut-on attribuer aux résultats obtenus ?

*L'approximation des milieux continus permet de faire passer une fonction u(x,t) par tous les points représentatifs des atomes de la chaîne à chaque instant (figure 2). Cela est possible lorsque $u_n$ est peu différent de $u_{n+1}$.*

*Définissons la fonction continue et dérivable u(x,t) des variables d'espace x et de temps t telle que $u(x,t) = u_n(t)$ lorsque $x = na$. Supposons que u(x,t) varie peu dans l'espace, à l'échelle de a. En considérant que l'atome (n) occupe l'abscisse x, remarquons que :*

$u(x + a,t) = u(na + a,t) = u_{n+1}(t)$

*et*

$u(x - a,t) = u(na - a,t) = u_{n-1}(t)$.

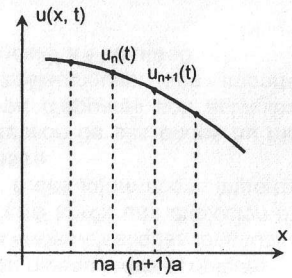


**Figure 2 : Représentation de u(x, t) à t fixé**

**A5.** En utilisant un développement limité à l'ordre 2, montrer que la fonction u(x,t) vérifie une équation de d'Alembert de la forme $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ et exprimer la célérité C en fonction de K, m et a. Comparer C à une expression obtenue en A4. et interpréter ce résultat.

## B – Modèle macroscopique et module d'Young

*Un barreau solide est initialement immobile dans un référentiel galiléen d'axe Ox. Lorsqu'il est au repos, ce barreau est un cylindre homogène d'axe Ox, taillé dans un matériau de masse volumique $\rho$, dont l'aire de chaque section sera notée S.*

*Une onde de déformation élastique longitudinale (onde de compression-dilatation) se propage à l'intérieur du barreau dans la direction de Ox ; cette onde est caractérisée par le champ scalaire des déplacements u(x,t) tel qu'une section située à l'abscisse x en l'absence d'onde se déplace à l'abscisse x + u(x,t) lors du passage de celle-ci (figure 3).*

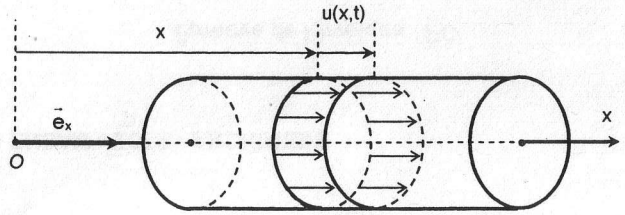


**Figure 3 : Onde élastique longitudinale dans un barreau**

Tournez la page S.V.P.



*Dans la limite des petites déformations, la matière située à gauche de la section déplacée en x + u(x,t) exerce sur celle-ci une force de rappel $\vec{F}_g$ dont l'expression générale est : $\vec{F}_g = -E\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,S\,\vec{e}_x$, où E désigne le module d'élasticité d'Young. De même, la matière située à droite de la section exerce sur celle-ci une force $\vec{F}_d$.*

**B1.** Etablir la dimension de E et justifier que $\vec{F}_d = -\vec{F}_g$.

*En l'absence d'onde, une tranche élémentaire de barreau située entre les abscisses x et x + dx possède un volume dV = S dx. Lors du passage de l'onde, son volume devient dV'. La dilatation volumique $\delta$ de cette tranche est définie comme le quotient $\delta = \frac{dV' - dV}{dV}$.*

**B2.** Expliciter la relation entre $\delta$ et $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$.

**B3.** En appliquant le principe fondamental de la dynamique à cette tranche, montrer que dans la limite des petits déplacements u(x,t) satisfait à une équation de d'Alembert de la forme : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$.
Exprimer la célérité C en fonction de E et $\rho$.

## C – Liaison interatomique et module d'Young

*Au sein d'un réseau cristallin métallique, l'énergie potentielle d'interaction de deux atomes A et B distants de r peut s'écrire : $E_P(r) = -\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\mu}{r^{10}}$, où $\lambda$ et $\mu$ sont deux constantes positives.*

*La force exercée par A sur B est de la forme $\vec{F}_{A/B} = F(r)\,\vec{u}$, où $\vec{u}$ désigne le vecteur unitaire directeur de la droite (AB), dirigé de A vers B.*

**C1*a.** Déterminer l'expression de F(r) en fonction de $\lambda$, $\mu$ et r. La distance d'équilibre entre deux atomes étant $r_0$, en déduire une relation entre $\lambda$, $\mu$ et $r_0$.

**C1*b.** Calculer les valeurs numériques de $\mu$ (exprimé en $eV.nm^{10}$) et de $E_P(r_0)$ (exprimé en eV) dans le cas précis du tungstène, métal pour lequel $r_0 = 0{,}274$ nm , $\lambda = 0{,}37$ $eV.nm^2$.
(rappelons qu'un électron-volt est égal à $1{,}6.10^{-19}$ J)
Quel sens concret peut on donner à $E_P(r_0)$ ?

**C1*c.** Tracer l'allure de la courbe $E_P(r)$ en indiquant ses points remarquables.
Dans quels domaines de r la force entre les deux atomes est elle attractive ou répulsive?

**C2.** En effectuant un développement limité de F(r), montrer que pour de petits déplacements autour de la position d'équilibre $r_0$, la force d'interaction F(r) est équivalente à celle d'un ressort dont on explicitera la raideur K en fonction de $\lambda$ et $r_0$.
Calculer K (exprimé en $N.m^{-1}$) pour le tungstène.

*Le tungstène cristallise dans un système cubique centré. La maille est un cube d'arête a dont les atomes occupent tous les sommets ainsi que le centre. Dans cette structure, chaque atome A possède huit plus proches voisins, tous situés à une même distance $r_0$ de A, $r_0$ étant la distance d'équilibre introduite en C1*a.*

**C3*a.** Etablir la relation entre $r_0$ et a puis calculer a (exprimé en nm).

**C3*b.** Quel est le nombre d'atomes par maille cubique ? Donner l'expression de la masse volumique $\rho$ de ce métal en fonction m (masse d'un atome) et de a.

*Une étude approfondie de la propagation des ondes élastiques longitudinales dans ce milieu tridimensionnel montre que, dans l'hypothèse des interactions limitées aux atomes les plus proches voisins et dans la limite des grandes longueurs d'onde ($k \to 0$), l'expression de la célérité obtenue en A5 doit être remplacée par :*

$$C = \sqrt{\frac{K}{3m}}\, a$$ *, où K est la raideur du ressort, calculée en C2.*

*En comparant cette expression aux résultats obtenus dans la partie B, il est possible de relier le module d'élasticité d'Young E aux paramètres microscopiques du métal.*

**C4*a.** Exprimer le module E, d'abord en fonction de K, a et m, puis en fonction de $\lambda$ et $r_0$.

**C4*b.** Calculer le module E du tungstène, à l'aide des données numériques précédemment fournies.

FIN Pb 1

Pb 2 CCP – PC – 2009

# PROBLÈME II
# VIBRATIONS TRANSVERSES

Ce problème porte sur la variation de fréquence d'un dispositif vibrant lorsque l'on y dépose une masse perturbatrice. Il aborde également le principe de fonctionnement d'un instrument très précis : la microbalance à quartz (QCM : quartz crystal microbalance).

## II.1 Ondes stationnaires le long d'une corde tendue

Une fine corde métallique homogène, quasi-inextensible et sans raideur, de masse linéique $\mu$, est soumise à une tension d'équilibre $T$. Ses déformations dans le plan $(x, y)$ sont décrites par une fonction de hauteur $y = h(x, t)$. Dans tout le problème, les déformations de la corde par rapport à l'axe horizontal sont supposées suffisamment faibles pour que :

- l'angle $\alpha(x, t)$ que fait la courbe $h$ avec l'horizontale soit un infiniment petit d'ordre 1, tout comme la dérivée $\partial h/\partial x$.
- les déplacements d'un point matériel lié à la corde n'aient qu'une composante verticale, les déplacements horizontaux étant négligeables.

Les extrémités de la corde sont dénommées A et B, d'abscisse respective $x_A$ et $x_B$. Le milieu de la corde est noté C, d'abscisse $x_C$ (Figure II.1). Tout au long du problème, on négligera les effets de pesanteur devant les forces de tension de la corde.

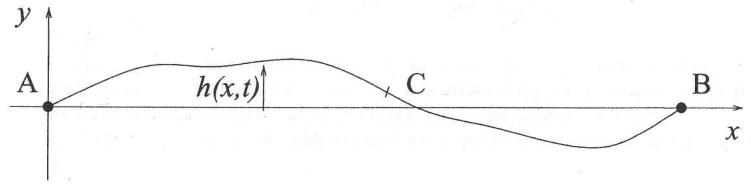


**Figure II.1**

- **II.1.1**
Soit un point O d'abscisse $x_O$ situé dans l'intervalle [AB] ($x_A < x_0 < x_B$). La partie de la corde située à droite du point O ($x > x_O$) exerce à chaque instant sur la partie de la corde située à sa gauche une certaine force $\vec{F}(x_O, t)$.
Comment s'exprime, en fonction de $T$ et d'une dérivée de $h(x, t)$, la composante verticale (suivant $y$) de cette force $\vec{F}$ ?

- **II.1.2**
Etablir, dans le cadre des hypothèses énoncées ci-dessus, l'équation de d'Alembert vérifiée par $h(x, t)$. Exprimer la célérité $c$ associée en fonction des paramètres $\mu$ et $T$.

- **II.1.3**
Peut-on observer des discontinuités spatiales de la dérivée $\partial h/\partial x$ en des points autres que $A$ et $B$ ? Justifier votre réponse.

- **II.1.4**
La corde est fixée en ses deux extrémités A et B à une hauteur nulle, soit $h(x_A, t) = 0$ et $h(x_B, t) = 0$. La longueur de la corde entre ces deux points est $2L$, et l'on choisit l'origine du

repère de façon à avoir $x_A = 0$ et $x_B = 2L$.
On recherche les ondes stationnaires de vibration de la corde sous la forme :

$$h(x,t) = Z\sin(kx+\phi)\cos(\omega t)$$

où $Z$ est une amplitude arbitraire.
Donner, en la démontrant, la relation existant entre $\omega$, $k$ et $c$.

- **II.1.5**

Les valeurs admissibles de $k$ (norme du vecteur d'onde) forment une suite de valeurs discrètes $k_n$, où $n = 1, 2, 3\ldots$ est entier positif.
Donner l'expression des $k_n$ admissibles, des pulsations propres $\omega_n$ et des fréquences $f_n$ associées.
Comment choisir la phase $\phi$ ?

- **II.1.6**

Tracer soigneusement l'allure de la déformation associée au mode de vibration fondamental $k_1$, telle qu'on pourrait l'observer à l'aide, par exemple, d'une caméra rapide ou d'une lampe stroboscopique.
Tracer de la même façon l'allure des déformations associées à la première, deuxième et troisième harmonique (respectivement $k_2, k_3, k_4$).
Compter et faire figurer sur votre schéma, à chaque fois, le nombre de "noeuds" et de "ventres" associés à ces modes de vibration.

- **II.1.7**

On peut montrer que l'énergie mécanique **par unité de longueur** $e(x,t)$ associée à l'onde est égale à :

$$e(x,t) = \frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right]$$

Calculer la valeur moyenne temporelle $\langle e\rangle$ en un point quelconque $x$ de la corde, pour le mode de vibration fondamental.

- **II.1.8**

En déduire l'énergie totale associée à la vibration du mode fondamental. On exprimera le résultat en fonction de la tension $T$ de la corde, de sa demi-longueur $L$ et de l'amplitude $Z$ des vibrations.
*Application numérique :* Que vaut l'amplitude $Z$ des vibrations lorsque l'énergie totale du mode est égale à 0,1 J, avec $L = 1$ m, $T = 100$ $N$ ?



**II.2 Perturbation par une masse**

On accroche à la corde une perle de masse $m$, située exactement au milieu de la corde, au point d'abscisse $x_C = L$. Cette masse est supposée ponctuelle (sans épaisseur).

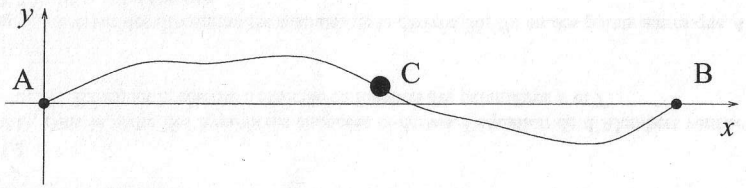


**Figure II.2**

- **II.2.1**

En considérant les schémas tracés à la question II.1.6, déterminer les modes de vibration susceptibles d'être modifiés (changement de fréquence propre) par la présence de la masse $m$.
Déterminer de la même façon les modes qui ne devraient pas être modifiés par la présence de la masse.

- **II.2.2**

En présence de cette masse supposée ponctuelle, les dérivées à gauche et à droite de $\partial h/\partial x$ ne sont pas nécessairement égales (la dérivée $\partial h/\partial x$ est discontinue en $L$).
En appliquant le principe fondamental de la dynamique (PFD), trouver une relation entre $T$, $m$, $\partial^2 h/\partial t^2(L,t)$ (accélération suivant $y$ de la masse), $\partial h/\partial x(L^-,t)$ et $\partial h/\partial x(L^+,t)$, où l'on a défini :

$$\partial h/\partial x(L^-,t) = \lim_{x\to L^-}\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)$$

lorsque $x$ tend vers $L$ par valeur inférieure, et :

$$\partial h/\partial x(L^+,t) = \lim_{x\to L^+}\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)$$

lorsque $x$ tend vers $L$ par valeur supérieure.
Illustrer votre relation par un schéma.

- **II.2.3**

On recherche le mode de vibration fondamental sous la forme d'une fonction symétrique par rapport à $L$, c'est-à-dire telle que $h(x,t) = h(2L-x,t)$, et donnée sur l'intervalle de gauche $0 \le x < L$ par :

$$h(x,t) = \sin(Kx)\cos(\omega t)$$

où $K$ est un vecteur d'onde à déterminer, et $\omega$ et $K$ vérifient la relation de dispersion habituelle.
Montrer que les conditions aux limites imposent désormais la condition de quantification suivante sur les valeurs possibles de $\omega$ et $K$ :

$$\operatorname{cotan}(KL) = \frac{\cos(KL)}{\sin(KL)} = \frac{m\omega^2}{2KT}$$

- **II.2.4**

Tracer la courbe représentative de $\mathrm{cotan}(x)$ sur l'intervalle $]0, 3\pi[$.

Montrer que si la masse $m$ est nulle, on retrouve comme cas particulier de l'équation ci-dessus le vecteur d'onde $k_1$ de la fréquence de vibration de la corde homogène.

- **II.2.5**

Lorsque $m$ est faible, on recherche un développement limité à l'ordre 1 en $m$ du vecteur inconnu $K$ :

$$K \simeq k_1 + \beta m$$

où $\beta$ est une constante à déterminer en fonction de $\omega$, $c$, $T$ et $L$. On utilisera en particulier le développement limité suivant de la fonction cotangente, valable pour de petites valeurs de $\varepsilon$ :

$$\mathrm{cotan}\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) \simeq -\varepsilon$$

$K$ est-il plus grand ou plus petit que $k_1$ ?

- **II.2.6**

Déduire de la question précédente le changement relatif de fréquence $\Delta f_1/f_1$ du mode de vibration fondamental de la corde lorsque l'on passe du vecteur $k_1$ au vecteur $K$. Exprimer le résultat en fonction de $m$, $\mu$ et $L$.

La détermination expérimentale de la nouvelle fréquence de vibration permet donc de **déterminer la masse** $m$ déposée sur la corde.

*Application numérique :* Calculer $m$ lorsque $L = 1$ m, $T = 100$ N, $\mu = 10^{-2}$ kg.m$^{-1}$, $\Delta f_1 = -1$ Hz.

**II.3 Une application : la microbalance à quartz**

Les oscillations transversales d'un cristal de quartz taillé peuvent être mesurées et entretenues à l'aide de deux fines électrodes métalliques placées de part et d'autre de la lame (propriété piézoélectrique). La face supérieure du quartz est libre, et par un calcul généralisant celui de la question précédente, on montre que toute masse $m$ déposée sur la face supérieure du quartz modifie sa fréquence de résonance $f_1$ en raison de la loi :

$$\Delta f_1 = -\frac{2mf_1^2}{\rho_q c_q S}$$

connue sous le nom d'équation de Sauerbrey, dans laquelle $\rho_q$ désigne la masse volumique du quartz, $c_q$ la célérité des ondes ultrasonores associées à cette vibration, et $S$ la surface du cristal vibrant.

Données :

– masse volumique du quartz : $\rho_q = 2650$ kg.m$^{-3}$

– célérité des ondes de vibration du quartz : $c_q = 3340$ m.s$^{-1}$





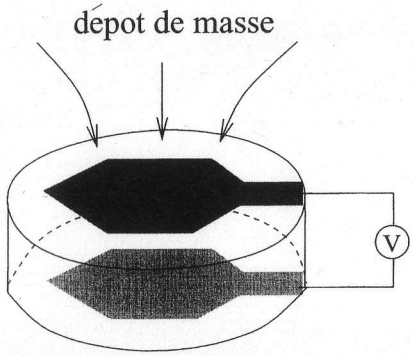


**Figure II.3**

Le phénomène ci-dessus est mis à profit pour mesurer de façon très sensible la variation de masse déposée sur la surface vibrante : c'est le principe de la **microbalance à quartz**, représentée sur la figure II.3. Toute masse $m$ déposée sur la surface entraîne une diminution de la fréquence de résonance du quartz, qui peut être déterminée précisément à l'aide d'un circuit électronique approprié.

- **II.3.1**

Montrer que l'équation obtenue à la question II.2.6 est équivalente à l'équation de Sauerbrey, à condition de remplacer la masse linéique $\mu$ de la corde par celle $\rho_q S$ du cristal. En l'absence d'autre source d'amortissement, le cristal de quartz peut-être considéré comme un circuit résonant de fréquence $f_1 = 5$ MHz, et de facteur de qualité élevé $Q = 2 \times 10^6$. Que vaut alors la largeur en fréquence de la bande de résonance du cristal ? Illustrer le résultat par un schéma.

- **II.3.2**

En se basant sur la largeur de la courbe de résonance, estimer la variation minimale de fréquence $\Delta f_1$ qu'un tel dispositif est susceptible de détecter. En déduire la valeur minimale du rapport $m/S$ (masse déposée par unité de surface) ainsi détectable.

*Application numérique :* donner la sensibilité, en nanogrammes, d'une microbalance à quartz dont la surface de vibration est $S = 0{,}1$ cm$^2$.

*Remarque : Dans la pratique, on utilise pour la mesure des fréquences de vibration harmoniques $f_3$, $f_5$... plus élevées que $f_1$.*

**Fin de l'énoncé**

FIN

&

Bonnes Vacances !