DS n°5 φ EVH/PC/09-10

Pb 1

A38X

e3a 2006-PC

CONCOURS ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Physique PC

durée 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de la calculatrice est autorisé

Remarques préliminaires importantes. Il est rappelé aux candidat(e)s que :

- *les explications des phénomènes étudiés interviennent dans la notation au même titre que les développements analytiques et les applications numériques.*
- *tout au long de l'énoncé, les paragraphes en italiques ont pour objet d'aider à la compréhension du problème mais ne donnent pas lieu à des questions.*
- *tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par les candidat(e)s.*

Un défi métrologique : la détection des ondes gravitationnelles

Le théorie d'Einstein de la relativité générale prévoit l'existence de phénomènes ondulatoires associés aux champ de gravitation : les ondes gravitationnelles. Depuis leur prédiction, en 1916 par EINSTEIN, aucune expérience n'a permis de détecter directement ces ondes. Les effets attendus sont en effet extrêmement faibles : en pratique, il faut déceler une variation de longueur avec une précision de l'ordre de 10^{-21} ! Une telle précision, autrefois inimaginable, semble aujourd'hui accessible à l'aide d'interféromètres de MICHELSON de très grandes dimensions (bras de plusieurs kilomètres). Les difficultés restent considérables, mais plusieurs installations sont en voie d'achèvement, tels les projets LIGO aux Etats-Unis et VIRGO en Europe ; elles devraient bientôt fournir leurs premières observations.

Tournez la page S.V.P.

La première partie de ce problème aborde le principe physique de la méthode de détection envisagée ainsi qu'un des moyens permettant de s'affranchir des fluctuations de puissance du LASER utilisé. La deuxième partie s'intéresse à l'aspect mécanique d'un des systèmes physiques, source d'ondes gravitationnelles susceptibles d'être détectées. Les deux parties sont totalement indépendantes entre elles.

Aucune connaissance de la théorie de la relativité d'Einstein n'est nécessaire à la résolution du problème.

Données physiques :

- constante de la gravitation : $G = 6{,}67.10^{-11}$ (S.I.)

- vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3.10^{8}\,\mathrm{m.s^{-1}}$

Conventions générales :

Le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\frac{\pi}{2}$ *sera noté j.*

Les grandeurs sinusoïdales seront représentées en notation complexe. Par convention, la grandeur complexe associée à une grandeur réelle de la forme $g(t) = g_0 \cos(\omega t + \varphi)$ *sera désignée par une lettre soulignée notée* $\underline{g} = g_0 \exp[j(\omega t + \varphi)]$.

Conventions relatives au signal lumineux :

Une onde lumineuse monochromatique de pulsation ω *est caractérisée par un signal lumineux* s, *dont la représentation complexe en un point* M *donné est de la forme* $\underline{s}(M,t) = a.\exp[j(\omega t - \varphi(M))]$ *où* a *est l'amplitude (constante) de l'onde et* $\varphi(M)$ *sa phase au point considéré.*

L'éclairement I *associé est relié au signal* $\underline{s}$ *par* $I = |\underline{s}|^2$.

PREMIÈRE PARTIE

DISPOSITIF INTERFERENTIEL ET METHODE DE DETECTION

A – Interféromètre de Michelson

1. Interférences entre deux ondes monochromatiques cohérentes

Etudions la superposition de deux ondes lumineuses monochromatiques, de même pulsation ω, *de même amplitude* a. *Au point* M *considéré, l'onde 1 possède une phase* $\varphi_1(M)$ *et l'onde 2, une phase* $\varphi_2(M)$.

A1*a. Exprimer le signal lumineux complexe $\underline{s}(M,t)$ résultant de la superposition de ces deux ondes au point M, en fonction de a, ω, t, $\varphi_1(M)$ et $\varphi_2(M)$.

A1*b. Montrer que l'éclairement observé en M peut s'écrire sous la forme $I(M) = 2I_0\,[1 + \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))]$, et exprimer I_0 en fonction de a. Quel est le sens concret de I_0 ?

A1*c. Posons $\delta\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$. Quelle condition doit vérifier $\delta\varphi(M)$ pour que soit observé en M un maximum d'éclairement ? A quelle condition sur $\delta\varphi(M)$ l'éclairement est-il minimal en M ?

2. Source monochromatique

La figure 1 représente le dispositif interférentiel utilisant un interféromètre de MICHELSON :

La séparatrice, S, inclinée de 45° par rapport aux miroirs M_1 et M_2 est idéalisée : il est admis qu'elle n'introduit aucun déphasage supplémentaire. L'interféromètre est supposé réglé en « lame d'air », ce qui signifie que les deux miroirs sont parfaitement perpendiculaires.

Les « bras » de l'interféromètre ont pour longueurs $d_1 = AB$ et $d_2 = AC$. Notons $\delta_0 = 2(d_2 - d_1)$.

Le bras 2 a une longueur fixée, notée $d_2 = L$.

Le miroir M_1 peut être translaté (lors d'un « chariotage »).

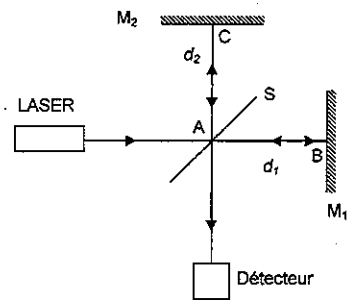


Figure 1 : Interféromètre de MICHELSON

Le LASER utilisé comme source émet un faisceau très fin, parfaitement perpendiculaire à M_1, de sorte que les deux faisceaux qui émergent de l'interféromètre sont exactement superposés sur le détecteur.

Le LASER est tout d'abord supposé parfaitement monochromatique, de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 1{,}06\ \mu m$.

L'éclairement reçu par le détecteur lorsque l'un des miroirs est occulté, est noté I_0.

A2*a. A quelle condition sur δ_0 dit-on que l'interféromètre de MICHELSON est au contact optique ? Décrire brièvement comment procéder, avec les interféromètres utilisés en Travaux Pratiques, pour déterminer précisément le contact optique.

A2*b. Exprimer l'éclairement $I(\delta_0)$ reçu par le détecteur, en fonction de I_0, λ et δ_0.

La théorie d'EINSTEIN de la relativité générale prévoit qu'une onde gravitationnelle provoque une variation de la longueur relative des bras, ce qui se traduit par un changement de différence de marche entre les deux signaux optiques qui interfèrent.

En présence d'un onde gravitationnelle, la différence de marche entre les deux ondes optiques au niveau du détecteur devient : $\delta = \delta_0 + L\varepsilon$, où ε est appelée amplitude de l'onde gravitationnelle. C'est une quantité extrêmement petite, dont l'ordre de grandeur attendu est $\varepsilon = 10^{-21}$.

A2*c. En effectuant un développement limité au premier ordre en ε, déterminer la variation d'éclairement $(\Delta I)_{og} = I(\delta) - I(\delta_0)$ induite par l'onde gravitationnelle en fonction de I_0, δ_0, L, λ et ε.

Tournez la page S.V.P.

A2*d. L'éclairement I_0 étant donné, comment faut-il choisir δ_0 pour que la variation d'éclairement $(\Delta I)_{og}$ soit aussi grande que possible en valeur absolue ?

A2*e. Pour améliorer la sensibilité de détection, il est intéressant de choisir une longueur L très grande. *(pour les applications numériques, prendre $L = 100$ km)* [1]

Déterminer numériquement la variation relative $\dfrac{(\Delta I)_{og}}{I_0}$ maximale attendue pour $\varepsilon = 10^{-21}$.

3. Influence de la largeur spectrale du LASER

Dans cette question, le LASER n'est plus une source parfaitement monochromatique, mais possède une largeur spectrale non nulle. Le LASER est considéré comme la superposition de sources quasi monochromatiques de pulsations ω, et l'éclairement spectral en pulsation sera désigné par $I_{0\omega}$.

Plus précisément, si l'un des miroirs de l'interféromètre est occulté (donc si une seule onde lumineuse parvient au détecteur), les composantes de pulsation comprise dans l'intervalle $[\omega, \omega + d\omega]$ donnent sur le détecteur un éclairement : $dI_0 = I_{0\omega}\, d\omega$.

Considérons un LASER possédant un profil spectral rectangulaire en pulsation, de largeur $\Delta\omega$, centré sur la pulsation ω_0, de la forme :

$$I_{0\omega} = K \text{ (constante), si } \omega \in \left[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right] \text{ et } I_{0\omega} = 0, \text{ si } \omega \notin \left[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right].$$

A3*a. Pourquoi est-il légitime de sommer les éclairements associés à des signaux de pulsations différentes ? Exprimer l'éclairement total I_0 reçu par le détecteur, *si l'un des miroirs est occulté*, en fonction de K et $\Delta\omega$.

A3*b. Supposons que la différence de marche entre les deux ondes est δ. *Si aucun des miroirs n'est occulté,* exprimer l'éclairement dI associé aux composantes de pulsation situées dans l'intervalle $[\omega, \omega + d\omega]$, en fonction de ω_0, δ, I_0, $\Delta\omega$ et $d\omega$.

A3*c. En déduire que l'éclairement $I(\delta)$ au niveau du détecteur est de la forme :

$I(\delta) = 2I_0\left[1 + V(\delta)\cos\left(\dfrac{\omega_0}{c}\delta\right)\right]$, et exprimer $V(\delta)$ en fonction de $\Delta\omega$, δ et c.

Que vaut $V(\delta)$ si $\Delta\omega = 0$? Commenter ce résultat.

A3*d. Quelle est la signification concrète du paramètre $|V(\delta)|$?

Pour une valeur donnée de la largeur $\Delta\omega$, représenter $|V(\delta)|$ en fonction de δ, en faisant apparaître les points remarquables.

A3*e. Justifier que le phénomène d'interférences n'est plus décelable si la différence de marche δ est nettement plus grande, en valeur absolue, que la longueur caractéristique $\ell_c = \dfrac{2\pi c}{\Delta\omega}$.

---

[1] *En réalité, les miroirs et la séparatrice sont distants de « seulement » quelques kilomètres (trois kilomètres pour le projet européen VIRGO), mais la longueur effective des bras est allongée à l'aide d'un dispositif optique (interféromètre de Fabry-Pérot) qui ne sera pas étudié ici.*

Dans l'interféromètre réel, il est difficile de garantir que les longueurs[2] des deux bras sont identiques à mieux que quelques mètres près. La différence de marche exacte de l'interféromètre, δ_0 n'est donc pas connue précisément ; en tout état de cause, elle est inférieure à $\delta_{0,max} = 10\,m$.

A3*f. Déterminer en fonction de $\delta_{0,max}$ un ordre de grandeur de la largeur $\Delta\omega_{max}$ maximale permettant d'observer des interférences pour $\delta = \delta_{0,max}$. Estimer numériquement $\frac{\Delta\omega_{max}}{\omega_0}$.

Admettons désormais que la largeur spectrale du LASER vérifie $\Delta\omega << \Delta\omega_{max}$, ce qui autorise à le considérer comme parfaitement monochromatique ; les résultats de la sous-partie 2. peuvent donc être appliqués.

B - Prise en compte des fluctuations de puissance du LASER

1. Influence des fluctuations de puissance

La puissance du LASER n'est en fait pas rigoureusement constante au cours du temps, mais a tendance à fluctuer de façon aléatoire, ce qui fait varier la quantité I_0.

B1*a. Sous l'effet d'une fluctuation de puissance, l'éclairement I_0 devient $I_0 + \Delta I_0$. En supposant que $\varepsilon = 0$, déterminer la variation correspondante d'éclairement détecté, $(\Delta I)_{fluc}$ en fonction de ΔI_0, δ_0 et λ.

B1*b. Comment doit-on choisir δ_0 pour que le signal détecté soit aussi insensible que possible aux fluctuations de puissance du LASER ? Comparer ce choix à la condition de détection optimale des ondes gravitationnelles établie au A2*d. et commenter.

2. Dispositif de POUND DREVER HALL

Le montage est modifié en intercalant sur chacun des bras une lame de verre, comme indiqué sur la figure 2 :

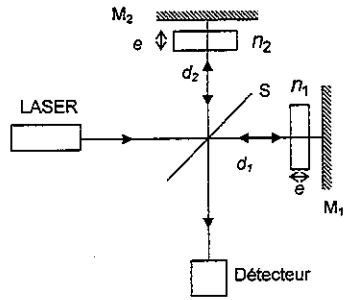


Figure 2 : Méthode de Pound Drever Hall

[2] Il s'agit, rappelons-le, de longueurs *effectives* (voir note 1).

Tournez la page S.V.P.

Les indices de chaque lame, respectivement n_1 et n_2 sont a priori différents. Chaque lame possède exactement la même épaisseur e. Le dispositif fonctionne en présence d'une onde gravitationnelle d'amplitude ε.

B2*a. Exprimer la nouvelle différence de marche δ au niveau du détecteur en fonction de $n_1, n_2, \delta_0, L, \varepsilon$ et e.

Les lames de verre sont en fait constituées d'un matériau dont l'indice de réfraction peut varier de façon contrôlée. Imposons ainsi à n_1 et n_2 une variation sinusoïdale au cours du temps, à la pulsation Ω, selon : $n_1(t) = n - a_0\cos(\Omega t)$ et $n_2(t) = n + a_0\cos(\Omega t)$, où a_0 est une constante.

B2*b. Montrer que l'éclairement peut s'écrire : $I = 2I_0\,[1+\cos(\Phi_0 + \alpha\varepsilon + 2m\cos(\Omega t))]$, et exprimer les constantes Φ_0, α et m en fonction de paramètres choisis parmi λ, L, a_0, e et δ_0.

3. Filtrage du signal détecté – choix du filtre

En « chariotant » le miroir M_1, l'interféromètre est placé en position de « frange sombre », ce qui correspond à $\Phi_0 = \pi + 2k\pi$, où k est un entier. Il est alors possible de montrer (calcul non demandé) que, si $m << 1$, l'éclairement dépend du temps selon la loi :

$$I(t) \cong I_0\left[m^2 + 2m\alpha\varepsilon\cos(\Omega t) + m^2\cos(2\Omega t)\right].$$

La chaîne de détection utilisée transforme ensuite l'éclairement reçu par le détecteur en une tension $V_d(t)$ proportionnelle à $I(t)$: $V_d(t) = \gamma\, I(t)$.

B3*a. Expliquer le type de filtrage qu'il convient de faire subir à $V_d(t)$, pour en extraire la composante proportionnelle à ε.

Le filtre utilisé est modélisé par le circuit représenté sur la figure 3, dans lequel l'amplificateur opérationnel est idéal et fonctionne en régime linéaire. k est une constante positive.

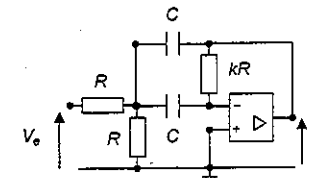


Figure 3 : Filtre

B3*b. Déterminer sans calcul la nature de ce filtre.

B3*c. En se plaçant en régime sinusoïdal établi de pulsation β, montrer que la fonction de transfert du montage $\underline{H} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}$ peut se mettre sous la forme

$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$, où $x = \frac{\beta}{\Omega_0}$ et H_0, Ω_0 et Q sont des constantes à exprimer en fonction de R, C et k.

B3*d. Définir le gain en décibel associé, noté G_{dB}.

Représenter le diagramme de BODE en amplitude : G_{dB} en fonction de $\log(x)$.

Pour le tracé, supposer Q = 10, et préciser :

- les asymptotes du diagramme (pente et ordonnée à l'origine),
- la valeur du gain G_{dB} en $x = 1$.

B3*e. Définir et déterminer la largeur de la bande passante du filtre à -3 dB en fonction de Q et Ω_0.

La tension d'entrée du filtre est en fait la tension délivrée par la chaîne de détection : $V_e(t) = V_d(t)$.

B3*f. A quelle condition entre Ω_0 et Ω le filtre étudié est-il le mieux adapté pour extraire la composante « gravitationnelle » du signal $V_d(t)$?

4. Résultat du filtrage

B4*a. La condition du B3*f. est supposée remplie. Montrer que le signal de sortie $V_s(t)$ est en fait la somme de deux composantes sinusoïdales de pulsations Ω et 2Ω, dont les amplitudes, notées respectivement A_Ω et $A_{2\Omega}$, seront précisées en fonction de γ, I_0, m, α, ε, Q et H_0.

La tension de sortie $V_s(t)$ est elle-même filtrée pour obtenir une tension finale constante, dépendant de I_0 et ε, qui s'exprime sous la forme :

$$V(I_0,\varepsilon) = b A_{2\Omega} + A_\Omega .$$

B4*b. Exprimer la variation $(\Delta V)_{fluc} = V(I_0 + \Delta I_0, 0) - V(I_0, 0)$ associée à une fluctuation ΔI_0 de l'éclairement du LASER, en fonction de ΔI_0, m, b, γ, Q et H_0.
Déterminer la variation $(\Delta V)_{og} = V(I_0,\varepsilon) - V(I_0,0)$ associée à une onde gravitationnelle d'amplitude ε en fonction de γ, I_0, ε, m et α et H_0.

B4*c. Pour un LASER et un interféromètre donnés, proposer un choix des paramètres de la chaîne de détection et de filtrage pour améliorer le rapport $\dfrac{(\Delta V)_{og}}{(\Delta V)_{fluc}}$.

Est-il vraiment intéressant de prendre une valeur de m très petite ?

Application numérique : Calculer $\dfrac{(\Delta V)_{og}}{(\Delta V)_{fluc}}$ avec les valeurs suivantes :

$$\frac{\Delta I_0}{I_0} = 10^{-5}\ ,\ m = 0{,}1\ ,\ b = 10^{-2}\ ,\ \alpha = 5{,}9.10^{11}\ ,\ Q = 10\ ,\ \varepsilon = 10^{-21}.$$

Peut-on détecter les ondes gravitationnelles malgré les fluctuations de puissance du LASER ?

Tournez la page S.V.P.

Plutôt que d'utiliser le circuit de la figure 3, il est courant d'employer un filtre modifié, dont le diagramme de Bode est représenté sur la figure 4, ci-dessous :

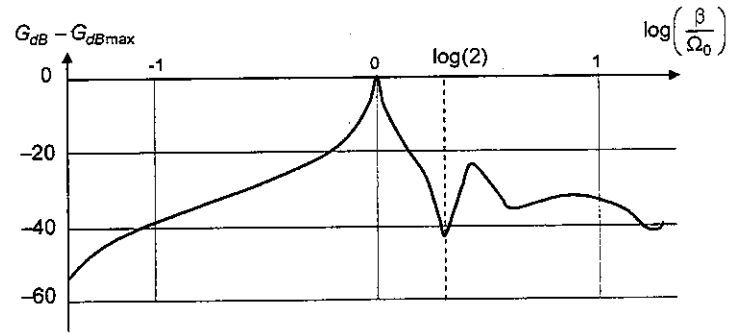


Figure 4 : Réponse expérimentale du filtre réel (projet LIGO)

En pratique $\Omega_0 = 1{,}6 \times 10^8\ \text{rad.s}^{-1}$; $G_{dB}(2\Omega_0) = G_{dB,max} - 43\,\text{dB}$

$G_{dB,max}$ est le gain maximum du filtre

B4*d. Pourquoi le montage réel est-il mieux adapté au filtrage désiré que le filtre étudié auparavant ? En supposant que le reste de la chaîne de détection et de filtrage n'est pas modifié, évaluer numériquement le rapport $\dfrac{(\Delta V)_{og}}{(\Delta V)_{fluc}}$ obtenu avec le filtre réel, puis conclure.

TROISIEME PARTIE

CONTROLE NON DESTRUCTIF DES TUBES METALLIQUES PAR COURANTS DE FOUCAULT

Cette partie s'intéresse à une méthode de contrôle des caractéristiques des tubes métalliques, non destructive et qui ne nécessite pas le démontage de l'installation où ces tubes sont utilisés.

Considérons un tube cylindrique d'axe Oz, de rayon intérieur R_1 de rayon extérieur R_2 et de très grande longueur (figure 1). Il est constitué d'un métal de conductivité électrique σ. Son épaisseur est notée $e = R_2 - R_1$.

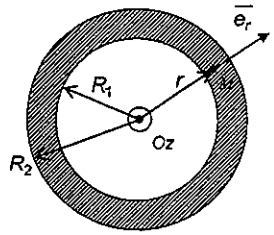
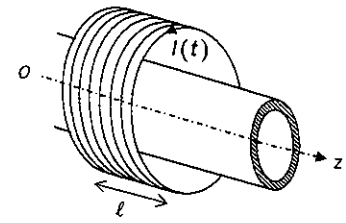


Figure 1

Une bobine (dite « excitatrice ») d'axe Oz comportant n spires circulaires par unité de longueur, de rayon b et de longueur totale ℓ (figure 7) entoure localement le tube. Elle est parcourue par un courant sinusoïdal d'intensité $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$, dont les variations sont suffisamment lentes pour que l'approximation des régimes quasi-stationnaires soit valable. L'ensemble est plongé dans l'air dont les propriétés électromagnétiques sont celles du vide.

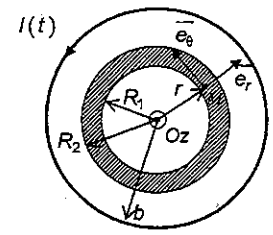
Utilisons le système des coordonnées cylindriques (r, θ, z) de base locale $(\overline{e_r}, \overline{e_\theta}, \overline{e_z})$.

Tournez la page S.V.P.



Vue en perspective

Figure 7



Vue en coupe

1 / COURANTS INDUITS DANS LE TUBE

La bobine, située entre $z = 0$ et $z = \ell$ est assimilée à un solénoïde infini : en dehors du volume cylindrique intérieur (de rayon b et de longueur ℓ) qu'elle délimite, le champ magnétique créé par $I(t)$ est nul. Dans ce volume, il est uniforme et s'écrit $\vec{B} = B_0(t)\overline{e_z}$.

Dans cette sous-partie 1, ce champ magnétique est le seul à prendre en compte. En particulier, l'éventuel champ magnétique créé par les courants susceptibles d'exister dans le tube est négligé.

1*a. Justifier la direction de $\vec{B}$ par un argument de symétrie.
Rappeler sans démonstration l'expression de $B_0(t)$ en fonction de n, I(t) et μ_0 (perméabilité du vide).

Soit une portion du tube comprise entre z et z + dz. L'épaisseur du tube étant très faible, cette portion peut être assimilée à une spire circulaire quasi-filiforme de rayon moyen $R_m = \dfrac{R_1 + R_2}{2}$, comme le montre la figure 8.

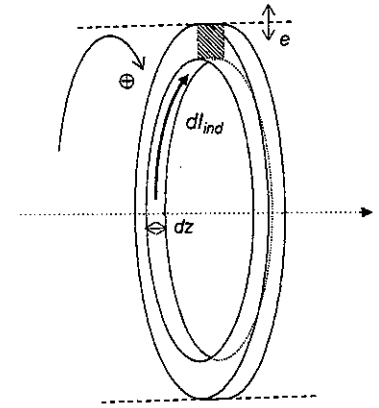


Figure 8

Portion de tube assimilée à une spire filiforme

1*b. Exprimer la conductance électrique dg d'une telle spire en fonction de e, dz, R_m et σ.

1*c. Déterminer la force électromotrice d'induction e_{ind} qui apparaît dans la spire du fait des variations de $B_0(t)$ en fonction de $\frac{dB_0}{dt}$ et R_m (l'orientation est celle de la figure 8 : sens direct par rapport à $\vec{e_z}$).

1*d. En déduire l'expression de l'intensité induite di_{ind} (orientée comme sur la figure 8) qui circule dans cette portion de tube, en fonction de σ, e, dz, R_m, μ_0, n et $\frac{dI}{dt}$.

2 / CHAMP MAGNETIQUE CREE PAR LES COURANTS INDUITS

Avec la description précédente, il est possible de considérer la portion de tube située entre $z = 0$ et $z = \ell$ comme une bobine circulaire comportant $n' = \frac{1}{dz}$ spires par unité de longueur, parcourues par un courant d'intensité di_{ind}.

2*a. Avec les mêmes approximations qu'à la sous-partie 1, donner l'expression en tout point du champ magnétique induit $\vec{B}_{ind}$ en fonction de σ, e, R_m, μ_0, n et $\frac{dI}{dt}$.

2*b. Les calculs précédents sont valables si $\|\vec{B_{ind}}\| << \|\vec{B}\|$. Montrer que cette condition est valable (en ordre de grandeur) si $e << e_c$, où e_c sera exprimée en fonction de la grandeur $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}$ et de R_m.

Calculer le rapport e/e_c à l'aide des données suivantes, puis commenter la valeur obtenue.

Données : $\sigma = 6{,}0.10^7$ S.m^{-1} , $R_m = 8{,}3$ mm , $e = 0{,}50$ mm , $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}
fréquence de travail : f = 100 Hz.

2*c. Que représente la grandeur δ ? Quel est le phénomène de l'électromagnétisme des conducteurs qui est négligé s'il est admis que $\|\vec{B_{ind}}\| << \|\vec{B}\|$?

Cette approximation $\|\vec{B_{ind}}\| << \|\vec{B}\|$ sera supposée vérifiée dans toute la suite de l'étude.

3 / IMPEDANCE APPARENTE DE LA BOBINE EXCITATRICE

3*a. Exprimer le flux Φ_{ind} de $\vec{B}_{ind}$ à travers la bobine excitatrice en fonction de n, ℓ, B_{ind} *et* R_m.

3*b. Montrer que la force électromotrice totale d'induction à travers la bobine excitatrice peut s'écrire sous la forme :

$$e_{total} = -L\frac{dI}{dt} + \Gamma\frac{d^2I}{dt^2}$$

où L est l'inductance propre de la bobine et en posant $\Gamma = k\mu_0{}^2 n^2 \sigma \ell e R_m{}^3$, k étant une constante numérique à expliciter.

Tournez la page S.V.P.

3*c. La bobine excitatrice a une résistance interne R. Quelle est l'impédance complexe $\underline{Z}(\omega)$ de cette bobine « à vide » (c'est-à-dire en l'absence du tube), exprimée en fonction de L, ω et R ?

3*d. Expliquer comment le tube entraîne une modification de la résistance apparente de la bobine, qui devient alors $R' = R + \delta R$.
Exprimer δR en fonction de Γ et ω.

3*e. Calculer δR pour le tube précédent, à une fréquence de travail f = 100 Hz, avec les caractéristiques suivantes pour la bobine : $n = 3{,}0.10^4$ spires.m^{-1} et $\ell = 0{,}10$ m.
Commenter le résultat obtenu.

La mesure de δR permet de mettre en évidence les modifications locales des caractéristiques du tube et donc d'en analyser les défauts éventuels.

3*f. Discuter qualitativement les types de défauts du tube qui sont susceptibles d'être mis en évidence par la mesure de δR.

3*g. Quelle est selon vous la fréquence optimale f_{opt} à utiliser pour accéder aux caractéristiques « en volume » du tube ?
Réaliser l'application numérique avec les valeurs précédentes.
Que se passerait-il si, comme c'est souvent le cas en pratique, une fréquence nettement plus élevée était utilisée ? Quels types de défauts pourraient alors être mis en évidence ?

Exo 3. CCP – PC – 08

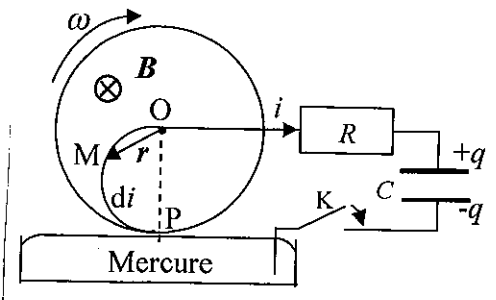


Figure 9'

La roue de Barlow

Le circuit représenté en Figure 9' comprend, dans un montage en série : une roue de Barlow, un résistor de résistance R, un condensateur de capacité C et un interrupteur K.

Cette roue de Barlow, disque conducteur homogène de centre O, de rayon a, de moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation, est soumise à un champ magnétique uniforme $\boldsymbol{B}$ parallèle à l'axe de la roue. Un point P de sa périphérie est en contact avec un bain de mercure pour assurer le passage du courant tout en minimisant les actions mécaniques de frottement que l'on négligera. On suppose la roue parfaitement conductrice.

La roue est lancée avec une vitesse angulaire initiale ω_0. À l'instant de fermeture de K, $t = 0$, le condensateur porte la charge initiale q_0 sur la plaque reliée au résistor.

1. Parmi la répartition quelconque des lignes de courant entre O et P, nous représentons sur la Figure 9', celle qui passe par un point M en transportant un courant d'intensité di.

1.1. Exprimer la force de Laplace $\mathbf{d}^2\boldsymbol{f}$ sur un élément $\mathbf{d}\boldsymbol{l}$ de cette ligne de courant.

1.2. Déterminer le moment $\boldsymbol{\Gamma}$, en O, des forces électromagnétiques agissant sur la roue en fonction de a, i et $\boldsymbol{B}$. Commenter le résultat obtenu.

1.3. Exprimer la f.é.m. induite en fonction de a, ω et $\boldsymbol{B}$.

(On utilisera, judicieusement, la circulation de $(\boldsymbol{v}_e \times \boldsymbol{B})$).

2. Établir les équations mécanique du mouvement de la roue et électrique du circuit. En déduire les lois d'évolution dans le temps de :

2.1. l'intensité $i(t)$ que l'on mettra sous la forme : $i(t) = i_0 \exp(-t/\tau)$. Déterminer i_0 et τ en fonction de a, J, R, C, q_0, $B = \|\boldsymbol{B}\|$ et $\omega_0 \cdot \boldsymbol{B}$.

2.2. la charge $q(t)$ du condensateur sachant que $q(0) = q_0$.

2.3. la vitesse angulaire $\omega(t)$ de la roue avec $\omega(0) = \omega_0$.

3. Quand t devient très grand, $q(t)$ et $\omega(t)$ tendent respectivement vers q_∞ et ω_∞. Expliciter q_∞ et ω_∞ en fonction de a, J, q_0, C, $\boldsymbol{B}$ et ω_0.

4. On fixe la vitesse angulaire initiale à la valeur ω_0 de façon que $\omega_0 \cdot \boldsymbol{B} < 0$.

4.1. Montrer que la roue se comporte initialement comme un générateur pour toute valeur de $q_0 > 0$.

4.2. A partir de quel instant t_r, celle-ci deviendra-t-elle un récepteur ?