

SESSION 2005



EPREUVE SPECIFIQUE – FILIERE MP

PHYSIQUE 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Conformément à l'usage international, les vecteurs sont représentés en gras.

Etude d'un étireur à réseaux

Dans le domaine de l'optique ultra-rapide, l'amplification des impulsions lumineuses se heurte à une difficulté majeure. En effet, lors de l'amplification, l'intensité crête, inversement proportionnelle à la durée des impulsions, peut prendre des valeurs bien supérieures au seuil de dommage du milieu amplificateur. Pour éviter cela, on utilise des dispositifs optiques permettant d'étirer temporellement l'impulsion avant amplification, et de la « re-comprimer » après amplification.

Dans ce problème on se propose d'étudier le principe d'un étireur d'impulsions constitué par l'association de deux réseaux à réflexion. Dans la première partie on étudiera les propriétés dispersives d'un seul réseau puis dans la deuxième partie, on étudiera celles résultant de l'association de deux réseaux identiques parallèles entre eux. Enfin, on étudiera dans la troisième partie le changement du profil temporel d'une impulsion de lumière se propageant dans ce dispositif optique.

1. Réseau à échelettes

On considère le réseau en réflexion dit à échelettes représenté dans la figure 1-a, constitué d'une succession de facettes réfléchissantes (largeur b) inclinées d'un angle γ par rapport au plan du réseau. Une onde plane monochromatique (longueur d'onde λ) éclaire le réseau sous un angle i_0

par rapport à la normale e_r et on observe l'onde diffractée à l'infini dans la direction qui fait un angle θ avec e_r . Les angles d'incidence et de diffraction par rapport à la normale de la facette sont respectivement α_0 et α .

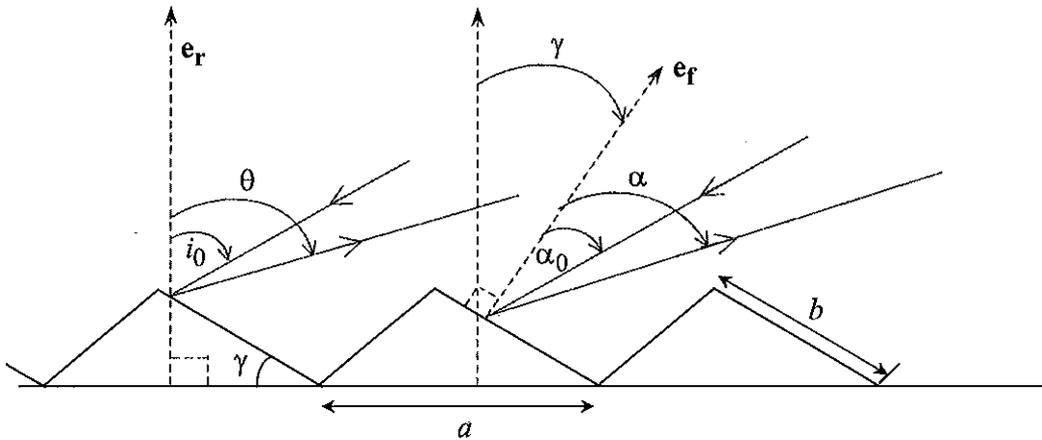


Figure 1-a

1.1. Diffraction par une facette

- Exprimer la différence de phase entre les ondes véhiculées par deux rayons incidents dont l'un tombe sur une extrémité de l'arête de la facette en fonction de α_0 , α et de la distance y (figure 1-b).
- En déduire l'expression de l'amplitude diffractée par une facette dans la direction α .
- Dans quelle direction de l'espace se situe le centre de la figure de diffraction ?

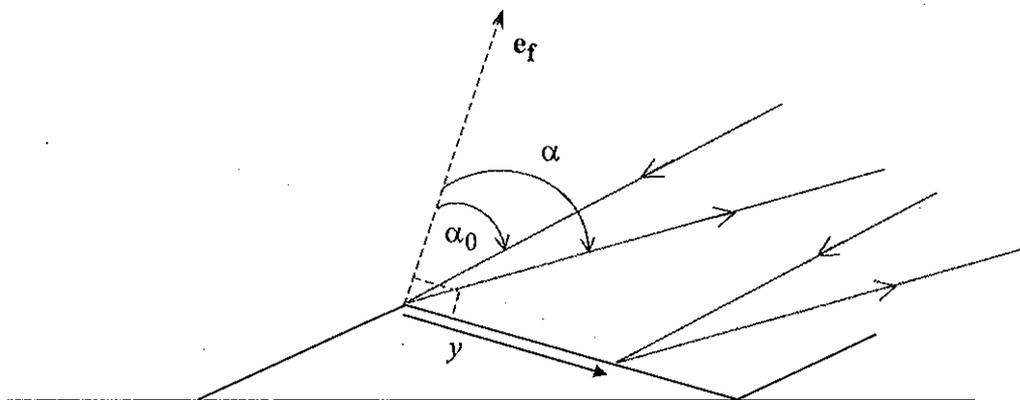


Figure 1-b

1.2. Diffraction par le réseau

- Exprimer la différence de phase entre les ondes véhiculées par deux rayons homologues incidents tombant sur deux facettes consécutives, séparés d'une distance a et des angles i_0 et θ (figure 1-c).
- En déduire la position des maxima principaux $\theta^{(m)}$ en fonction de λ, a, i_0 et d'un nombre entier m .
- On veut faire coïncider pour une longueur d'onde λ_0 l'ordre +1 du réseau avec le maximum de la courbe de diffraction d'une facette. Calculer la distance a entre les facettes qui permette de réaliser cette condition. Application numérique : $\gamma = 30^\circ$, $i_0 = 45^\circ$, $\lambda_0 = 2 \mu m$.

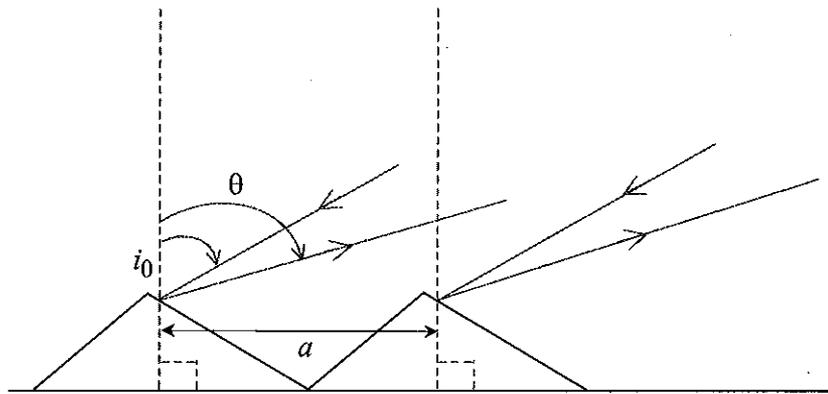


Figure 1-c

On suppose par la suite que la condition du 1.2.c est réalisée et que le réseau (avec $\gamma = 30^\circ$) se comporte comme un miroir, réfléchissant l'onde incidente dans la direction $\theta(\omega)$ donnée par $\sin \theta(\omega) = \frac{2\pi c}{\omega a} - \sin i_0$ pour des longueurs d'ondes $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ proches de $\lambda_0 = 2 \mu m$ et où c est la vitesse de la lumière ($c = 3 \cdot 10^8 m/s$). On néglige ainsi l'énergie répartie sur les autres maximums. On supposera aussi que la largeur du pic principal est négligeable.

2. Combinaison de deux réseaux à échelettes

On considère maintenant deux réseaux à échelettes (mêmes paramètres γ et a) parallèles entre eux disposés comme le montre la figure (2). La distance z entre les réseaux est supposée être grande de sorte que l'on se trouve dans les conditions de diffraction à l'infini quand l'onde lumineuse irradie le réseau 2. On envoie une onde plane véhiculée par le rayon incident faisant un angle $i_0 = 45^\circ$

avec la normale au réseau 1. L'onde à l'entrée du réseau 1 est une impulsion lumineuse qui s'écrit sous la forme $E(t) = E_0 \exp\left[-(t/\tau)^2\right] \exp(i\omega_0 t)$ où τ est une constante et $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$ est la pulsation centrale. On définit les relations de passage entre une fonction complexe $E(t)$ et sa transformée de Fourier $\hat{E}(\omega)$:

$$\hat{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) \exp(-i\omega t) dt \text{ et } E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{E}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega.$$

$\hat{E}(\omega)$ est une fonction complexe de ω . L'impulsion lumineuse peut être décrite comme une superposition d'ondes monochromatiques dont le poids de chaque composante est donné par $\frac{1}{2\pi} |\hat{E}(\omega)|^2$. On a dessiné sur la figure (2) le trajet correspondant à une onde de pulsation centrale ω_0 . On pose $\theta_0 = \theta(\omega_0)$.

On donne la relation $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(c_1 t^2 + 2ic_2 t\right)\right) dt = \sqrt{\frac{\pi}{c_1}} \exp\left(-c_2^2/c_1\right)$ avec c_1, c_2 réels et $c_1 > 0$.

On convient de définir la « largeur » d'une courbe comme la demi-largeur à $1/e$ du maximum de cette courbe.

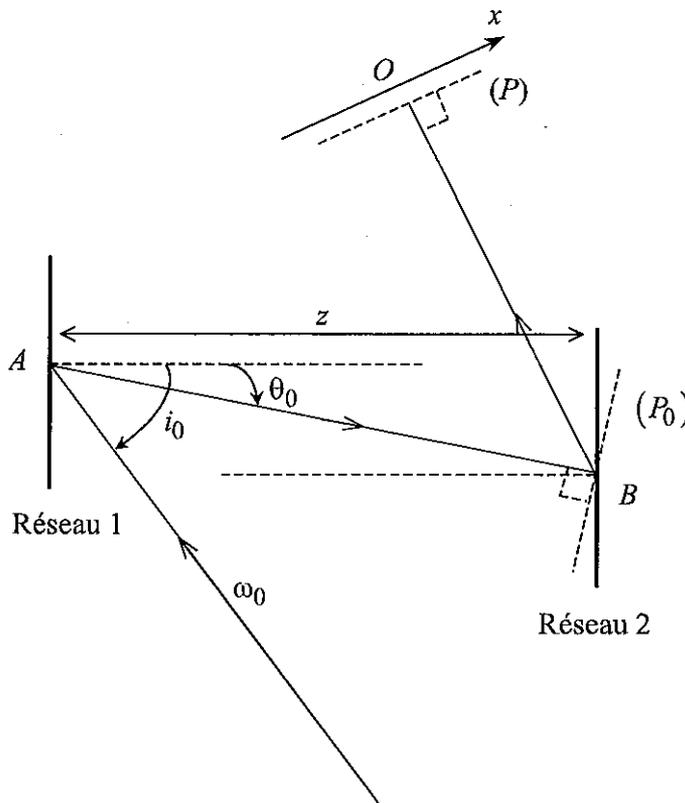


Figure 2

2.1. a. Donner la signification de τ .

b. Calculer la transformée de Fourier $\hat{E}(\omega)$ de l'impulsion.

Tournez la page S.V.P.

- c. En déduire sa « largeur ».
- 2.2. a. Dans quelle direction, mesurée par rapport au rayon incident sur le réseau 1, est diffracté le rayon lumineux associé à ω_0 après le deuxième réseau ?
- b. Dessiner le trajet d'un rayon correspondant à une composante spectrale ω quelconque proche de ω_0 .
- c. Conclure sur les directions des rayons diffractés par le deuxième réseau.
- 2.3. a. Pour une composante spectrale ω , trouver la relation $x(\theta)$ donnant le point d'impact du rayon lumineux sur le plan d'observation (P) perpendiculaire au trajet du rayon associé à ω_0 . On prendra l'origine $x = 0$ pour $\omega = \omega_0$.
- b. A partir de la relation $\theta(\omega)$, trouver la relation entre $\Delta\theta = \theta(\omega) - \theta_0$ et $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ sachant que θ est proche de θ_0 .
- c. En déduire la relation $\omega(x)$ caractérisant l'étalement spatial du spectre de l'impulsion le long du plan (P). On rappelle que ω et θ sont proches de ω_0 et θ_0 respectivement, et qu'un développement limité peut donc être effectué.
- d. En ne tenant compte que de la dispersion spatiale déterminée précédemment, déterminer le profil spatial de l'intensité lumineuse au niveau de ce plan (P).
- e. Application numérique : Calculer θ_0 en degré puis la « largeur » de la courbe de l'intensité diffractée dans le plan (P) pour $\tau = 100 \text{ fs}$ ($1 \text{ fs} = 10^{-15} \text{ s}$), $z = 2 \text{ m}$, et $a = 2,07 \text{ } \mu\text{m}$.

3. Etirement temporel d'impulsions lumineuses

La différence de phase totale $\Delta\phi$ accumulée jusqu'au plan (P) entre deux rayons associés à ω et ω_0 s'exprime à partir d'un développement limité à l'ordre 2 comme $\Delta\phi = \phi_0' \Delta\omega + \frac{\phi_0''}{2} (\Delta\omega)^2$ où

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0, \quad \phi_0' = \left(\frac{d\phi}{d\omega} \right)_{\omega_0} \quad \text{et} \quad \phi_0'' = \left(\frac{d^2\phi}{d\omega^2} \right)_{\omega_0}.$$

- 3.1. En comparant à l'unité le terme de second ordre, pour quelles durées τ la correction d'ordre deux est-elle nécessaire ? On prendra $\Delta\omega = 2/\tau$.
- 3.2 Le coefficient ϕ_0'' peut être calculé en utilisant le fait que le déphasage quadratique au niveau du plan (P) est le même que le déphasage dans le plan (P_0) (figure 2) et est dû uniquement à la diffraction par le réseau 1.
- a. Calculer la phase accumulée par un rayon associé à ω à partir du point d'impact A et diffracté dans le plan (P_0) en fonction de la distance AB et $\Delta\theta = \theta(\omega) - \theta_0$.
- b. En déduire le coefficient ϕ_0'' en fonction de a , z , ω_0 et l'angle de diffraction θ_0 . Application numérique.

- 3.3 a. En tenant compte du déphasage $\Delta\phi$, reconstituer le profil temporel du champ électrique de l'impulsion lumineuse au niveau du plan (P).
- b. En déduire le module du champ.
- c. Quelle est la signification du coefficient ϕ_0 ?
- d. Donner la largeur temporelle τ_p de l'impulsion au plan (P).
- e. Application : On envoie une impulsion lumineuse dans ce dispositif telle que $\tau = 100 \text{ fs}$. Calculer la durée de l'impulsion τ_p .

PROBLÈME II MOUVEMENT DE SPHÈRES DANS LES FLUIDES

On définit le repère de coordonnées sphériques (figure II.1 ci-dessous) :

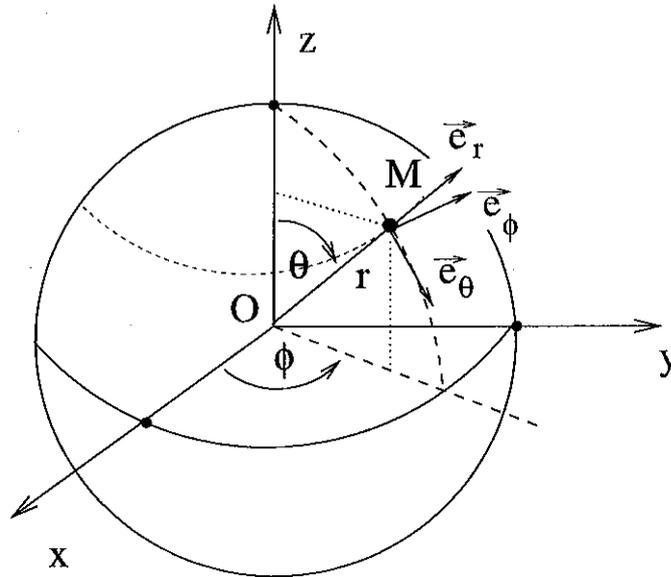


Figure II.1

La relation entre coordonnées sphériques et cartésiennes est :

$$\begin{aligned} x &= r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y &= r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z &= r \cos(\theta) \end{aligned}$$

Les champs de vecteurs au point M (r, θ, ϕ) seront exprimés dans le repère local $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$. L'axe (Oz) désigne la verticale ascendante du référentiel d'observation.

On pourra, tout au long du problème, utiliser le formulaire d'analyse vectorielle suivant, pour les champs scalaires :

$$\begin{aligned} \vec{\text{grad}}(f) &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \\ \Delta f &= \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\cos(\theta)}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \end{aligned}$$

et pour les champs vectoriels $\vec{X} = X_r \vec{e}_r + X_\theta \vec{e}_\theta + X_\phi \vec{e}_\phi$:

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{X}) &= \frac{2}{r} X_r + \frac{\partial X_r}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r \sin(\theta)} X_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial X_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial X_\phi}{\partial \phi} \\ \vec{\text{rot}}(\vec{X}) &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial X_\phi}{\partial \theta} + \frac{\cos(\theta)}{r \sin(\theta)} X_\phi - \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial X_\theta}{\partial \phi} \right) \vec{e}_r \\ &+ \left(\frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial X_r}{\partial \phi} - \frac{X_\phi}{r} - \frac{\partial X_\phi}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta \\ &+ \left(\frac{\partial X_\theta}{\partial r} + \frac{X_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial X_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\phi \end{aligned}$$

On utilisera, pour les applications numériques, les données suivantes :

- viscosités dynamiques de l'air et de l'eau dans les conditions usuelles : $\eta_{air} = 1,8 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$; $\eta_{eau} = 1,0 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$
- masses volumiques de l'air et de l'eau : $\rho_{air} = 1,3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$; $\rho_{eau} = 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.
- accélération de la pesanteur $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

II.1 Fluide parfait dans un champ de pesanteur

Ne pas
travailler

- **II.1.1**
On note ρ la masse volumique du fluide, \vec{g} le champ de pesanteur, P_t la pression et \vec{v} le champ de vitesse. Ecrire l'équation d'Euler pour un fluide parfait, en supposant le référentiel d'observation galiléen.

$$\hookrightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} P_t \quad (\text{par info})$$

- **II.1.2**
En déduire, à une constante près, la valeur de la pression hydrostatique $P_h(z)$, lorsque le fluide, supposé incompressible, est au repos dans le référentiel galiléen.

II.2 Ecoulement stationnaire d'un fluide parfait autour d'une sphère immobile

On note ρ la masse volumique du fluide et \vec{v} le champ de vitesse. On définit la surpression P comme la différence entre la pression P_t et la pression hydrostatique P_h définie dans la partie précédente. Dans toute cette partie, on remplacera dans l'équation d'Euler la pression P_t par la surpression P , et on **négligera totalement** l'influence du champ de pesanteur.

- **II.2.1**
Donner la condition d'incompressibilité de l'écoulement.
- **II.2.2**
On considère un écoulement potentiel, $\vec{v}(\vec{r}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\Phi(\vec{r}))$, où Φ est une fonction arbitraire de l'espace, et $r = ||\vec{OM}||$ la distance à l'origine du repère de coordonnées sphériques.
Que vaut alors le rotationnel du champ de vitesse \vec{v} ?
- **II.2.3**
Soit le potentiel $\Phi_u(\vec{r}) = uz$, avec u une constante. Reconnaitre le champ de vitesse \vec{v}_u associé.
- **II.2.4**
Exprimer Φ_u à l'aide des coordonnées sphériques r, θ, ϕ .
Exprimer dans la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ le champ de vitesse \vec{v}_u associé à Φ_u .
- **II.2.5**
On donne maintenant le potentiel

$$\Phi_s(r, \theta, \phi) = \left(ur + \frac{b}{r^2} \right) \cos(\theta)$$

où b est une constante. Calculer le champ de vitesse \vec{v}_s associé.

- **II.2.6**
Vérifier que le champ de vitesse \vec{v}_s correspond bien à un écoulement incompressible.
- **II.2.7**
Montrer que pour une valeur particulière a de la distance r , la composante radiale de la vitesse

(c'est-à-dire la composante orientée suivant \vec{e}_r) s'annule. Exprimer b en fonction de u et de a . Réécrire le champ de vitesse en fonction de u , a , r et θ .

- **II.2.8**

On s'intéresse désormais à la région de l'espace $r \geq a$, extérieure à la sphère de rayon a , et on souhaite représenter sur un schéma l'allure du champ de vitesse dans le demi-plan défini par $\phi = 0$ et $\theta \in [0, \pi]$.

Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous, pour une constante u égale à 1.

r	θ	v_r	v_θ	r	θ	v_r	v_θ
a	0			$2a$	0		
a	$\pi/4$			$2a$	$\pi/4$		
a	$\pi/2$			$2a$	$\pi/2$		
a	$3\pi/4$			$2a$	$3\pi/4$		
a	π			$2a$	π		

- **II.2.9**

A l'aide des valeurs du tableau, représenter graphiquement le champ de vitesse pour $r \geq a$. Tracer l'allure de quelques lignes de courant.

- **II.2.10**

On rappelle que dans le cas d'un écoulement potentiel, le terme de dérivée convective peut-être mis sous la forme :

$$\left(\vec{v} \cdot \text{grad} \right) (\vec{v}) = \text{grad} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right)$$

Déduire de l'équation d'Euler pour un écoulement parfait potentiel stationnaire, en l'absence de pesanteur, l'existence d'une quantité C dépendant de \vec{v} , ρ et P , et dont la valeur est uniforme dans l'espace.

Quel nom donne-t-on à ce résultat ?

En faisant tendre r vers l'infini, et en faisant l'hypothèse que $\lim_{r \rightarrow \infty} P(r) = 0$, déterminer la constante C .

- **II.2.11**

En déduire la valeur de la surpression $P(r = a, \theta, \phi)$ au voisinage de la sphère $r = a$.

La sphère subit-elle de la part de l'écoulement une force de trainée, c'est-à-dire une force dirigée suivant \vec{e}_z ? (répondre sans faire de calcul.)

II.3 Sphère en mouvement de translation dans un fluide visqueux : approche qualitative

Une sphère de rayon a en mouvement de translation à vitesse \vec{u} dans un fluide de viscosité η , subit de la part de ce fluide une force de trainée \vec{F} égale à $\vec{F} = -6\pi\eta a\vec{u}$, pourvu que cette vitesse de déplacement soit suffisamment faible (loi de Stokes).

- **II.3.1**

Une bille de rayon a et de masse volumique ρ_b est lâchée sans vitesse initiale dans un fluide de viscosité η et de masse volumique ρ . La bille et le fluide sont soumis à l'influence de la pesanteur, dont l'accélération est notée \vec{g} . Etablir l'expression de la vitesse de la bille, fonction du temps, ainsi que la vitesse limite \vec{u}_∞ atteinte par celle-ci, dans le cadre de la loi de Stokes.

Ne pas tracer

- II.3.2

Calculer la vitesse limite de chute associée respectivement à une gouttelette de brouillard (rayon $1 \mu\text{m}$), puis à une goutte de pluie (rayon 1 mm) dans l'air. Ce dernier résultat vous paraît-il réaliste ?

- II.3.3

Pour juger de la validité de la formule de Stokes, il faut calculer le nombre de Reynolds associé à l'écoulement du fluide autour de la bille. Proposer une expression du nombre de Reynolds Re associé au mouvement de chute d'une bille dans un fluide de viscosité η .

A quelle condition peut-on considérer que la loi de Stokes est valable ?

Cela est-il le cas dans les exemples de la question précédente ?

Comment se comporte la force de traînée à grande vitesse ?

II.4 Interactions hydrodynamiques dans un fluide visqueux

Les **interactions hydrodynamiques** sont des forces transmises par le fluide sur les objets qui s'y déplacent. Elles expliquent divers effets observés durant la **sédimentation** de petits objets (processus par lequel des particules dans un fluide au repos se déposent), comme la tendance de ceux-ci à tomber les uns à la verticale des autres, ou à tomber à une vitesse différente s'ils sont proches les uns des autres.

Lorsqu'une bille sphérique se déplace verticalement vers le bas à vitesse $\vec{u} = -u\vec{e}_z$, elle crée un déplacement du fluide autour d'elle, dont le champ de vitesse à grande distance et dans un repère de coordonnées sphériques dont l'origine est occupée par la particule, est donné par (forme d'Oseen) :

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{3au}{4r} [-2 \cos(\theta)\vec{e}_r + \sin(\theta)\vec{e}_\theta]$$

(voir figure II.2 à gauche). L'expression ci-dessus, que l'on admettra, n'est valable que pour des distances r très supérieures au rayon a de la bille qui se déplace. Le champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r})$ représente la vitesse d'écoulement du fluide **dans le référentiel du laboratoire**.

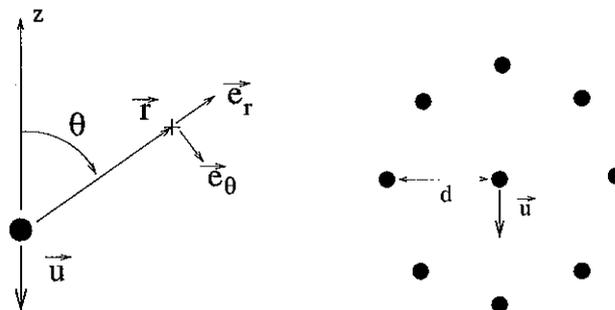


Figure II.2

- II.4.1

Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant, pour une valeur de la constante $3au/(4r)$ égale à 1 (où v_r et v_θ désignent respectivement les composantes radiales et orthoradiales du champ de vitesse) :

θ	v_r	v_θ
0		
$\pi/4$		
$\pi/2$		
$3\pi/4$		
π		

- II.4.2

Neuf billes identiques occupent les positions de la figure II.2 à droite. Les huit billes extérieures sont à égale distance d de la bille centrale et immobiles par rapport au fluide. La bille centrale est animée d'un mouvement vertical, et d'une vitesse \vec{u} dirigée vers le bas.

Reproduire la figure II.2 de droite sur la copie, puis dessiner l'allure des forces exercées par le déplacement de la bille centrale sur chacune des huit billes périphériques voisines, supposées immobiles, et causées par la nature visqueuse de l'écoulement.

- II.4.3

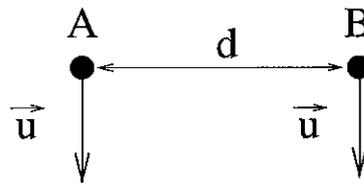


Figure II.3

Deux sphères identiques A et B soumises à leur poids et à la friction visqueuse du fluide descendent à la même vitesse \vec{u} (figure II.3). On note \vec{r}_A et \vec{r}_B les positions respectives des sphères A et B, \vec{r}_{AB} la séparation $\vec{r}_B - \vec{r}_A$, et d la distance $||\vec{r}_{AB}||$. On suppose que le déplacement de la bille A crée au point B un champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r}_{AB})$ par rapport au référentiel du laboratoire. La bille B subit donc de la part du fluide une force de friction de Stokes égale à :

$$\vec{F}_s = -6\pi\eta a[\vec{u} - \vec{v}(\vec{r}_{AB})]$$

En faisant un bilan des forces exercées sur la bille B, déduire sa vitesse de descente \vec{u} en fonction de sa masse m , de l'accélération de la pesanteur g , de la viscosité du fluide η et du rayon a .

En comparant avec le résultat obtenu en II.3.1, conclure sur le fait que deux billes proches sédimentent plus vite, moins vite ou aussi vite qu'une bille isolée.

Fin de l'énoncé