Équation différentielles linéraires

1 Équations différentielles du 1$^{\text{er}}$ ordre à coefficients constants

Équation générale	$ay'(t) + by(t) = c$
Équation homogène	$ay'(t) + by(t) = 0$
Solution de l'équation homogène	$y(t) = \lambda \exp\big(-\frac{b}{a}t\big)$
Solution particulière de l'équation générale	$y(t) = \frac{c}{b}$
Solution de l'équation générale	$y(t) = \lambda \exp\big(-\frac{b}{a}t\big) + \frac{c}{b}$
Nombre de conditions initiales (*c. i.*) nécessaires et suffisantes	1

Méthode (valable aussi pour les équations différentielles à coefficients non constants) :

On a $a(t)\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + b(t)y(t) = 0$

donc $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -\dfrac{b(t)}{a(t)}\,\mathrm{d}t$

soit $y(t) = \lambda \exp \varphi(t)$ avec $\varphi(t) = \displaystyle\int \frac{-b(t)}{a(t)}\,\mathrm{d}t$

2 Équations différentielles du 2$^{\text{nd}}$ ordre à coefficients constants

Équation générale	$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d$
Équation homogène	$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$
Solution de l'équation homogène	dépend du signe du discriminant
Solution particulière de l'équation générale	$y(t) = \frac{d}{c}$
Solution de l'équation générale	$y(t) =$ solution de l'équation homogène $+ \frac{d}{c}$
Nombre de *c. i.* nécessaires et suffisantes	2

Résolution de l'équation homogène par le polynôme caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0$$

On calcule le discriminant, $\Delta = b^2 - 4ac$. Puis on calcule les solutions r du pôlynome caractéristique.

$\Delta > 0$	2 solutions réelles r_1 et r_2	$y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$
$\Delta = 0$	1 solution double réelle r_0	$y(t) = (\mathrm{A}t + \mathrm{B})e^{r_0 t}$
$\Delta < 0$	2 solutions complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$	$y(t) = (\lambda_1 \cos\beta t + \lambda_2 \sin\beta t)e^{\alpha t}$

Important ! Pour les deux types d'équa. diff., on ne calcule les constantes d'intégration grâce aux *c. i.* qu'après avoir ajouté la solution particulière à la solution de l'équation homogène.