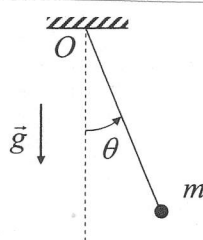


Exo 1 Un grand classique : le pendule simple

Une bille de masse $m = 200 \text{ g}$ est accrochée au bout d'un fil de masse négligeable, de longueur $l = 1,0 \text{ m}$ et suspendu en un point O fixe du support. Dans cette question, on fait l'hypothèse d'un mouvement plan du pendule.



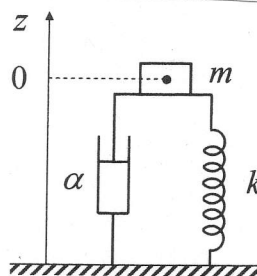
- On lâche la bille avec une vitesse nulle dans une position initiale faisant un angle $\theta_0 = 15^\circ$ avec la verticale. Quelle est sa vitesse lors de son passage par la position verticale ?
- Établir l'équation différentielle du mouvement par application de la relation fondamentale de la dynamique. Dans l'hypothèse des petites amplitudes, quelle est la solution $\theta(t)$ sachant que le pendule a été lâché avec une vitesse initiale nulle dans la position $\theta = \theta_0$.
Quelle est la période T_0 des oscillations ? Commenter et faire l'A.N.
- Développer une méthode énergétique pour établir la période de ce pendule. Comment est-elle reliée à la méthode précédente ?
- On lâche maintenant la bille avec une vitesse nulle dans une position initiale faisant un angle $\theta_0 = 90^\circ$ avec la verticale. Exprimer la tension du fil à tout instant ; quelle est sa norme au passage par la verticale, commenter.

Exo 2 Confort d'une voiture

On s'intéresse au mouvement de translation vertical d'une voiture de masse à vide m . L'origine de l'axe Oz repère la position du centre de masse de la voiture dans la situation où celle-ci est immobile, en équilibre.

La suspension du véhicule peut être modélisée par un ressort de raideur k , placé en parallèle avec un amortisseur qui exerce une force de frottement

$$\vec{f} = -\alpha \frac{dz}{dt} \vec{u}_z.$$



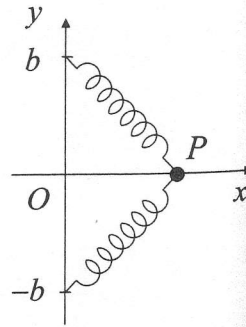
- Établir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$, et déterminer le coefficient α en fonction de m et k pour que le régime d'amortissement des oscillations soit critique lorsque la voiture est vide.
- La voiture contient à présent des passagers de masse m_p . Quel est alors le régime d'amortissement ? Pour que la voiture soit confortable, on souhaite une pseudo-période $T = 1 \text{ s}$ adaptée à l'organisme humain. Quelle raideur k doit avoir le ressort si $m = 1500 \text{ kg}$ et $m_p = 300 \text{ kg}$?

Exo 3 Chute libre avec frottement fluide

Un mobile soumis à la pesanteur et à une force de frottement fluide opposée à la vitesse est lancé avec une vitesse initiale inclinée d'un angle sur l'horizontale. Quel raisonnement simple (les calculs de trajectoire sont superflus...) permet de prouver que sa vitesse (en norme) est minimale après le sommet de la trajectoire ?

Exo 4 Positions d'équilibre et stabilité

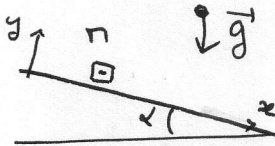
P est un corps de masse m qui coulisse sans frottement sur un axe horizontal Ox . Il est attaché à deux ressorts identiques, de raideur k et de longueur à vide l_0 ; ces ressorts sont fixés sur l'axe Oy en $\pm b$, à une distance b , paramètre variable que l'on fixe avant l'expérience.



- Donner l'expression de la projection $F(x)$ sur Ox de la force totale qu'exerce les ressorts sur P et en déduire les positions d'équilibre x_e en fonction de la valeur de b .
- Discuter de la stabilité de ces positions d'équilibre et donner la période T de celles qui sont stables en distinguant les cas $b > l_0$ et $b < l_0$.
- Examiner séparément le cas $b = l_0$; quelles originalités présente-t-il ?

On donne l'intégrale elliptique $\alpha = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} \approx 1,31$.

Exo 5 Frottements solides

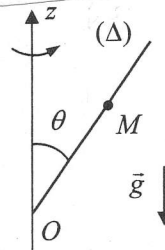


Soit un mobile de masse m posé sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On appelle f le coefficient de frottement solide.

- Déterminer la valeur limite à donner à α pour que le solide commence à glisser.
- Quelle est la vitesse limite atteinte par le solide ?

Exo 6 Anneau glissant sur un axe incliné en rotation

Un petit anneau, assimilé à un point matériel noté M , est enfilé sur une tige (Δ) sur laquelle il glisse sans frottement. (Δ) rencontre l'axe vertical $z'z$ au point O . La tige fait avec l'axe Oz un angle θ constant et elle est animée d'un mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de Oz . On pose $OM = s$.



- Pour quelle valeur s_e de s l'anneau est-il en équilibre par rapport à la tige ? Prévoir qualitativement, par l'étude des forces, si cette position d'équilibre est stable ou instable. Retrouver ce résultat avec l'énergie potentielle totale dans le référentiel relatif.
- On abandonne l'anneau, avec une vitesse initiale nulle par rapport à la tige, en une position M_0 définie par $OM_0 = s_0$ (avec $s_0 \neq s_e$). Établir l'équation différentielle définissant le mouvement de M le long de la tige. La résoudre et en déduire $s = f(t)$.

Dans quel sens se produit le mouvement relatif de M si $s_0 > s_e$, si $s_0 < s_e$?

- Déterminer, à chaque instant, les composantes de la réaction exercée par la tige sur l'anneau, en fonction de s , ω et θ .

Exo 7 Fréquence des vibrations d'une molécule

Dans une molécule diatomique (considérée comme un système isolé), les vibrations de faible amplitude autour de la position d'équilibre sont modélisées à l'aide d'un oscillateur harmonique (les deux atomes de masse m_1 et m_2 sont reliés par un ressort de raideur K et sont portés par un axe Ox).

Quelle est la pulsation propre de vibration ω ?

AN : Pour la molécule $H-Cl$, la distance d'équilibre entre les deux atomes est $r_0 = 0,13 \text{ nm}$; $m_H = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$; $m_{Cl} = 35,5 m_H$. La molécule interagit avec l'extérieur sous forme de photons dont la pulsation est précisément ω et dont la longueur d'onde correspondante (dans l'infrarouge) est $\lambda = 3,3 \mu\text{m}$. En déduire la grandeur K .

Exo 8 Mesure expérimentale d'une constante de raideur

On réalise des expériences pour étudier les mouvements, suivant l'axe vertical, d'une masse m accrochée à un ressort vertical. $z = 0$ correspond à la position d'équilibre. On donne $m = 200 \text{ g}$.

La masse est plongée dans de l'eau et subit une force de frottement fluide modélisé par une force de type $-\lambda \vec{v}$. L'extrémité A est fixe (figure 1). L'enregistrement des positions $z(t)$ de la masse m au cours du temps, après l'avoir écartée de sa position d'équilibre et lâchée avec une vitesse initiale nulle (régime libre), conduit au graphe ci-après.

- Montrer que la décroissance des valeurs maximales de $z(t)$ est exponentielle et déterminer le coefficient d'amortissement $\alpha = \lambda / 2m$. En déduire la valeur de λ .
- Déterminer graphiquement la pseudopériode et en déduire le décrétement logarithmique et la valeur de la constante de raideur k du ressort.

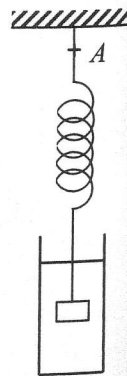
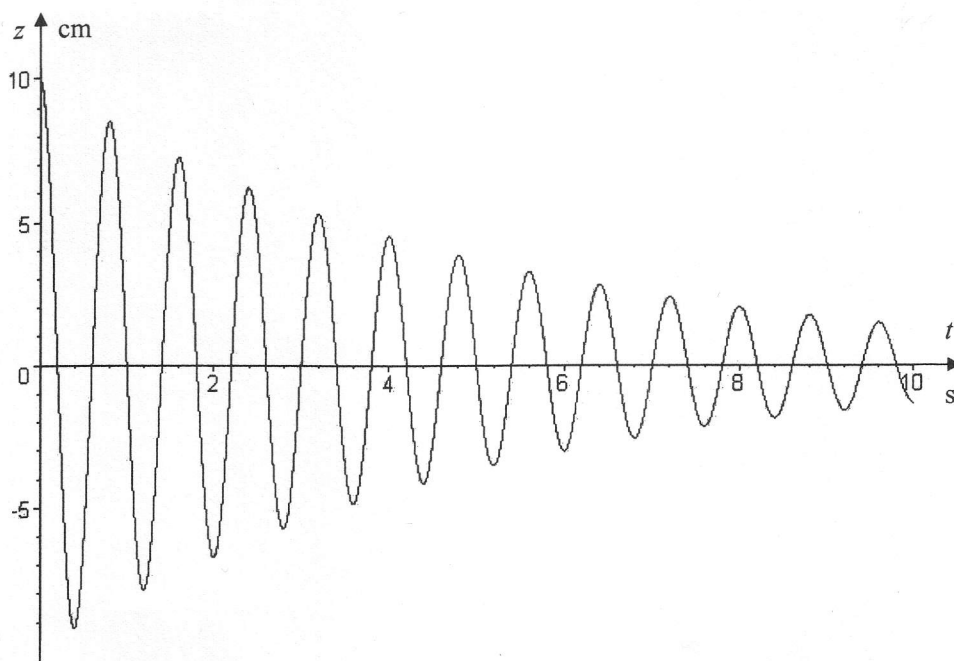


figure 1

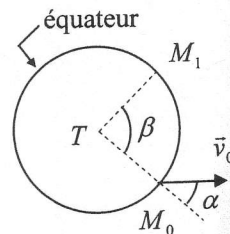


Exo 9 Masse du Soleil

Calculer la masse du Soleil grâce à la 3^e loi de Kepler.

Exo 10 Étude d'un tir balistique

Un projectile est lancé depuis l'équateur, d'un point M_0 , avec une vitesse $\vec{v}_0$, de norme v_0 et de direction appartenant au plan équatorial et formant l'angle α avec la verticale du lieu ; cette vitesse est mesurée dans le référentiel géocentrique. Le projectile retombe sur la Terre en un point M_1 tel que $(\overrightarrow{TM_0}, \overrightarrow{TM_1}) = \beta$ comme indiqué sur la figure.



La norme v_0 a pour valeur la vitesse de satellisation circulaire en orbite basse.

- Justifier que le projectile retombe sur la Terre en suivant une trajectoire elliptique et que M_1 soit sur l'équateur.
- Exprimer v_0 en fonction de g_0 et R_T .
- Exprimer le demi-grand axe de l'ellipse trajectoire en fonction de R_T .
- Expliquer en quoi le point M_0 est un point particulier de l'ellipse trajectoire. En déduire la position de l'axe focal et montrer que $\beta = 2\alpha$.
- Exprimer le demi-petit axe b , l'excentricité e et le paramètre p en fonction de R_T et α .
- Comment choisir α , pour atteindre un point M_1 situé à l'Est de M_0 et à 20° de longitude de M_0 ?
- Établir les relations permettant de choisir la norme et la direction de la vitesse de lancement par rapport au référentiel terrestre pour que la vitesse soit $\vec{v}_0$ dans le référentiel géocentrique.
Faire l'A.N. dans le cas décrit à la question f).

Exo 11 Déviation de Rutherford

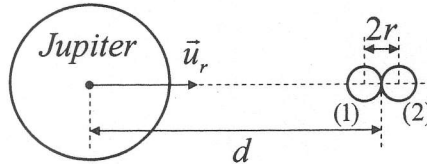
On bombarde une mince feuille d'or avec des particules α (noyau d'hélium). Une particule α de masse $m_\alpha \approx 4m_p$ arrive avec une vitesse $\vec{v}_0$ dont le support est distant de b (paramètre d'impact) du noyau d'or de numéro atomique $Z = 79$ et de nombre de masse $A = 197$; elle est déviée d'un angle D par rapport à sa trajectoire initiale.

- On considère le système des deux particules comme isolé et on écrit la force sur la particule α : $\vec{f} = \frac{k}{r^2} \vec{u}_r$; que vaut k ? Peut-on confondre le point matériel fictif et la particule α ? Estimer l'erreur relative. Quelle est la nature de la trajectoire ?
- Calculer $\tan D/2$ en fonction de k , m_α , v_0 et b .
- Reprendre le problème avec $b = 0$. Quel est dans ce cas la distance d d'approche minimale de la particule α au noyau d'or ?
AN : $v_0 = 30\,000 \text{ km.s}^{-1}$ $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Exo 12 Limite de Roche - un premier modèle (classique difficile)

On cherche à déterminer la distance en dessous de laquelle une comète s'approchant de Jupiter se sépare en plusieurs morceaux sous l'effet des forces de marée dues à Jupiter. Pour cela, on fait les hypothèses suivantes :

- le référentiel Jupitérocentrique est galiléen, et Jupiter (masse M_J , rayon R_J) est un astre sphérique et homogène,
- la comète de masse volumique μ_c est en orbite circulaire de rayon d autour de Jupiter,
- la comète est constituée de deux sphères identiques de masse m et de rayon r , homogènes et disposées comme indiqué sur la figure (les trois centres restent alignés au cours du mouvement) ; elles sont liées entre elles par leur attraction gravitationnelle mutuelle.



- Établir que le mouvement du centre d'inertie de la comète est uniforme, puis déterminer l'expression de ω^2 , le carré de la vitesse angulaire du mouvement.
- On note $\vec{R}$ la réaction de la sphère de gauche (1) sur la sphère de droite (2) de la comète. Écrire la relation fondamentale de la dynamique (ou théorème de la résultante cinétique) pour l'une des sphères dans le référentiel Jupitérocentrique. Est-il nécessaire de le faire pour la seconde ?
- À quelle condition le contact entre les deux sphères est-il rompu ? En déduire, sachant que $\frac{r}{d} \ll 1$, que cela conduit pour d à une limite inférieure d_{lim} et exprimer $\frac{d_{lim}}{R_J}$ en fonction de μ_c et μ_J , masse volumique de Jupiter.

AN : $M_J = 1,9 \cdot 10^{27}$ kg ; $R_J = 7,1 \cdot 10^4$ km et $\mu_c = 1,0 \cdot 10^3$ kg.m⁻³ ; calculer $\frac{d_{lim}}{R_J}$.