

## Exo 1 Champ magnétique proche de l'axe d'une spire

Une spire circulaire de centre  $O$  et de rayon  $R$  parcourue par un courant  $I$  crée en un point de son axe  $Oz$  un champ  $\mathbf{B}_{\text{axe}} = B_0(z)\mathbf{u}_z$ . On utilise un système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  et le trièdre local associé. On donne les expressions de la divergence et du rotationnel :

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

a) Montrer qu'on peut chercher le champ sous la forme :

$$\mathbf{B} = B_r(r, z)\mathbf{u}_r + B_z(r, z)\mathbf{u}_z$$

où  $B_r(r, z)$  et  $B_z(r, z)$  ne dépendent pas de  $\theta$ .

b) On suppose que  $B_z(r, z) \approx B_0(z)$ . Déterminer  $B_r(r, z)$  à l'ordre un en  $r$ .

c) Déterminer  $B_z(r, z)$  en limitant les calculs à l'ordre deux en  $r$ .

## Exo 2 Modèle de Drude

Un métal contient  $n$  électrons libres de charge  $-e$  par unité de volume. On admet que tout se passe comme si chaque électron était soumis, de la part du réseau métallique, à une force de frottement du type  $-Kv$ , où  $v$  est la vitesse de l'électron. On désignera par  $m$  la masse des électrons.

1) On suppose qu'un champ électrique permanent  $\vec{E}$  règne dans le métal; montrer que le modèle précédent permet d'interpréter la relation d'Ohm  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ . Exprimer  $K$  à l'aide de  $n$ ,  $e$  et  $\sigma$ . Quel est le temps de relaxation  $\tau$  de ce processus de conduction ?

2) On applique maintenant au métal un champ électrique  $\vec{E}$  alternatif de pulsation  $\omega$ ; montrer que la relation  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  est encore vraie si la pulsation  $\omega$  est inférieure à une certaine valeur que l'on précisera; exprimer cette condition en introduisant le temps de relaxation  $\tau$ . Calculer numériquement la valeur limite de  $\omega$  dans le cas du cuivre:  $\sigma = 6.10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ ,  $n = 9.10^{28} m^{-3}$ ; on donne  $m = 0,9.10^{-30} kg$  et  $e = 1,6.10^{-19} C$  (réponses :  $K = ne^2/\sigma$ ;  $\tau = m\sigma/ne^2$ ; A.N :  $\tau = 2,3.10^{-14} s$ ; 2°)  $\omega \ll 2\pi/\tau = 2,7.10^{14} rad \cdot s^{-1}$ )

## Exo 3 ARQS

On considère un milieu de conductivité  $\sigma$  pour lequel le courant de conduction  $\vec{j}$  est lié à  $\vec{E}$  par  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ . On suppose que  $\sigma$  a la même valeur en régime sinusoïdal qu'en régime permanent. Pour un champ  $\vec{E}$  de pulsation  $\omega$ , calculer le rapport  $\alpha$  des amplitudes du courant de conduction et du courant de déplacement. Pour  $\omega = 2\pi.10^6 rd \cdot s^{-1}$  chiffrer ce rapport dans les cas suivants :

- 1) pour le cuivre ( $\sigma = 6.10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ )
- 2) Pour un sol argileux ( $\sigma \approx 10^4 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ )
- 3) pour du verre ( $\sigma \approx 10^6 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ )

(réponses :  $\alpha = \sigma/\epsilon_0 \omega$  ; 1)  $\alpha = 1,1.10^{12}$  ; 2)  $\alpha = 1,8$  ; 3)  $\alpha = 1,8.10^2$ )

## Exo 4 Particule colloïdale dans un électrolyte

Une particule colloïdale peut être assimilée, en première approximation, à une sphère de grand diamètre, à l'échelle atomique, portant une densité superficielle de charge  $\sigma$ . En suspension dans un électrolyte, cette particule est entourée d'une gaine ionique qui modifie ses propriétés physicochimiques.

On se propose de déterminer ici quelques caractéristiques électrostatiques de ce phénomène.

Dans un but de simplification :

— la particule colloïdale est assimilée, en tout point de la surface à son plan tangent. Ainsi donc, le problème est ramené à l'étude de la gaine ionique qui vient recouvrir un plan que l'on suppose infini et uniformément chargé (densité superficielle de charge  $\sigma$ ). Ce plan  $Oyz$  est au contact de l'électrolyte situé dans le demi-espace des  $x$  positifs. Dans le demi-espace des  $x$  négatifs le champ électrique est supposé nul;

— l'électrolyte est composé d'ions  $I_+$  portant une charge positive  $+q$  et d'ions  $I_-$  portant la charge négative  $-q$ .

De plus, du fait de l'existence d'un équilibre thermodynamique, on peut montrer que les nombres  $n_+(x)$  et  $n_-(x)$  d'ions  $I_+$  et  $I_-$  par unité de volume peuvent s'écrire

$$n_+(x) = n_0 \exp \left[ - \frac{qV(x)}{kT} \right]$$

$$n_-(x) = n_0 \exp \left[ + \frac{qV(x)}{kT} \right]$$

expressions dans lesquelles  $n_0$  est une constante,  $V(x)$  représente le potentiel à l'abscisse  $x$ ,  $k$  est la constante de Boltzmann et  $T$  la température absolue.

1° Par application du théorème de Gauss à la surface d'un cylindre d'axe  $Ox$ , de base quelconque, de surface  $S$  et délimité par les plans abscisses  $x$  et  $x + dx$  trouver une relation liant  $\frac{d^2V}{dx^2}$ ,  $V(x)$ ,  $kT$ ,  $q$ ,  $n_0$  et  $\epsilon_0$ .

2° Donner les solutions générales de cette équation dans le cas où, quel que soit  $x$ ,

$$qV(x) \ll kT.$$

3° Montrer que seule la solution qui se met sous la forme

$$V(x) = A \exp \left( - \frac{x}{D} \right)$$

est physiquement acceptable.

4° Calculer  $D^2$  en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $kT$ ,  $n_0$  et  $q$ . Calculer  $A$  en fonction de  $\sigma$ ,  $D$  et  $\epsilon_0$ .

5° Montrer que le potentiel de la particule colloïdale a la même expression que la différence de potentiel qui existe entre les plateaux d'un condensateur qui sont distants de  $D$  et pour lesquels la densité superficielle de charge de l'uné des armatures est  $\sigma$ .

## Exo 5

### Bilan énergétique d'un fil conducteur

Un fil cylindrique infini conducteur ohmique de conductivité  $\gamma$  d'axe  $Oz$  et de rayon  $a$  est parcouru par un courant permanent d'intensité  $I$  réparti uniformément

1. Exprimer les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  en tout point intérieur au fil
2. Exprimer la puissance électromagnétique entrant dans un tronçon de fil de hauteur  $h$
3. Exprimer, en fonction de  $R$  (résistance du tronçon) et de  $I$ , la puissance cédée par le champ électromagnétique à la matière du tronçon de fil
4. Effectuer un bilan énergétique; comment s'écrit-il en régime permanent?



## Exo 7 Câble coaxial (1)

Un câble coaxial infiniment long d'axe  $Oz$  est constitué (Fig. 12) d'une part d'un conducteur cylindrique plein d'axe  $Oz$  et de rayon  $R_1$  parcouru par un courant constant d'intensité  $I$  (comptée positivement dans le sens des  $z$  croissants) uniformément réparti dans toute la section avec une densité de courant  $\mathbf{j} = j \mathbf{u}_z$ ; et d'autre part d'un conducteur cylindrique creux d'axe  $Oz$  et de rayon  $R_2$  parcouru par des courants superficiels de vecteur  $\mathbf{j} = j_s \mathbf{u}_z$  uniforme et tel que l'intensité totale du courant (comptée positivement dans le sens des  $z$  croissants) vaut  $-I$ . L'espace en dehors de ces conducteurs est vide.

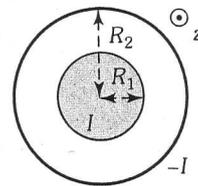


Figure 12

1. Exprimer le champ magnétique en tout point de l'espace. En déduire l'expression de  $j_s$  en fonction de  $I$  et  $R_2$ .

2. Exprimer l'énergie magnétique  $U_m$  du champ magnétique  $\mathbf{B}$  créé par le câble coaxial pour une longueur  $h$  de câble. En déduire par analogie avec le cas d'une bobine l'expression de l'inductance propre  $L$  d'une portion de longueur  $h$  du câble. Calculer l'inductance linéique  $\mathcal{L}$  pour  $R_1 = 1 \text{ mm}$  et  $R_2 = 2,7 \text{ mm}$ .

3. On admet que tout se passe comme si le conducteur (2) était plongé dans un champ effectif  $\mathbf{B}_{\text{eff}}$  uniforme, égal à la moyenne du champ réel de part et d'autre du cylindre. En déduire que le conducteur (2) subit sur sa face interne une surpression d'origine magnétique  $p_m$  à expliciter.

4. Le cylindre (2) est en réalité coupé sur toute sa longueur  $h$  en deux demi-cylindres identiques s'appuyant chacun sur un demi-cercle de rayon  $R_2$ , la coupure étant parallèle à l'axe  $Ox$ . Calculer la résultante des forces magnétiques subies par un demi-cylindre.

## Exo 8

### Étude d'un câble coaxial en tant que ligne de transport d'énergie

Un câble coaxial est constitué de deux cylindres infinis conducteurs  $C_1$  et  $C_2$  d'épaisseurs très faibles, de même axe ( $Oz$ ) et de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ) placés dans le vide.  $C_1$  est parcouru par un courant continu d'intensité  $I$  dirigé dans le sens de ( $Oz$ ),  $C_2$  par le courant de retour de même intensité et de sens opposé. On néglige la chute de tension le long du câble et on note respectivement  $V_1$  et  $V_2$  les potentiels de  $C_1$  et  $C_2$ . L'ensemble du système possède la symétrie cylindrique.

1. Calculer, en coordonnées cylindriques, le champ magnétique entre les cylindres.

2. Montrer que le potentiel électrostatique  $V$  vérifie une équation aux dérivées partielles simple entre les cylindres. En déduire l'expression de  $V(r)$  en fonction de  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .

3. Exprimer le champ électrique à l'intérieur des deux armatures.

4. Calculer le flux du vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$  à travers un plan normal à ( $Oz$ ) et interpréter le résultat obtenu.

Donnée : Laplacien d'une fonction scalaire  $f(r)$  en coordonnées cylindriques :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right)$$

## Exo 8

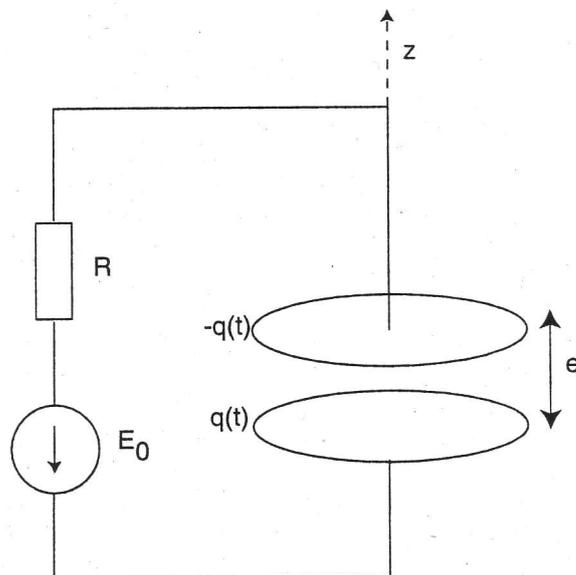
### Bilan énergétique de la charge d'un condensateur

Les armatures d'un condensateur plan, constituées de deux disques conducteurs, de surface  $S = \pi a^2$  et de rayon  $a$ , de même axe  $Oz$  et séparés d'une distance  $e$  sont reliées à partir de l'instant  $t = 0$  à une source idéale de tension  $E_0$  par une résistance  $R$ . Initialement, le condensateur est déchargé. A un instant quelconque où la tension à ses bornes vaut  $V(t)$ , ses armatures portent respectivement les charges  $q(t) = CV(t)$  et  $-q(t)$  où  $C$  est la capacité du condensateur (cf. figure ci-contre). On admet l'expression  $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$  pour la capacité, extrapolée des régimes statiques.

On néglige les effets de bord, et on suppose qu'en coordonnées cylindriques le champ électromagnétique dans le condensateur est en première approximation de la forme :

$$\vec{E} = E(t) \vec{u}_z \text{ et } \vec{B} = B(r, t) \vec{u}_\theta \quad (1)$$

et le champ électrique est nul à l'extérieur du condensateur.

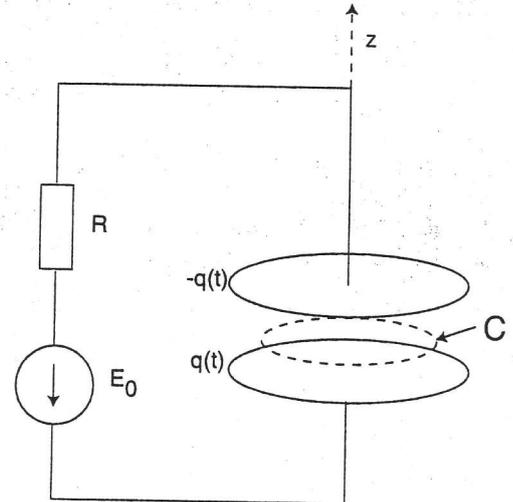
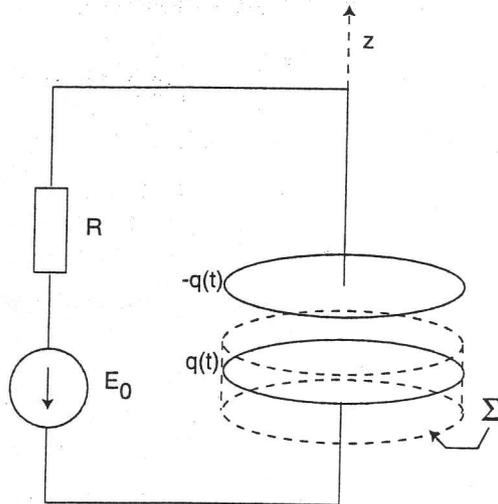


1. En utilisant les lois de l'électrocinétique, déterminer  $V(t)$  et montrer que le condensateur reçoit au cours de sa charge l'énergie

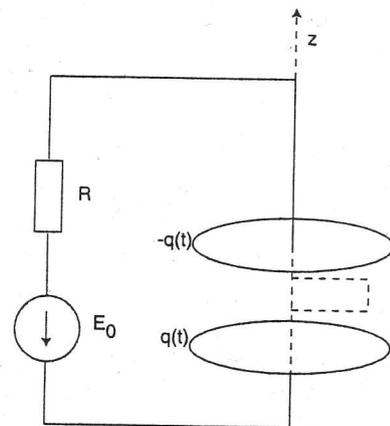
$$U_C = \frac{1}{2} C E_0^2 \quad (2)$$

Montrer que ce processus "brutal" de charge est irréversible. Comment faut-il opérer pour le rendre réversible ?

2. A un instant quelconque, déterminer  $E(t)$  en utilisant le théorème de Gauss à la surface  $\Sigma$  représentée en pointillés sur la figure de gauche ci-dessous et  $B(r, t)$  en appliquant le théorème d'Ampère au contour  $C$  représenté sur la figure de droite ci-dessous (cercle de rayon  $r < a$  et d'axe  $Oz$ )



3. Donner l'expression de la puissance électromagnétique  $P_{entrant}$  entrant dans le condensateur, puis de l'énergie électromagnétique  $U_{EM}$  emmagasinée par le condensateur au cours de sa charge. Comparer avec l'énergie  $U_C$  déterminée à la question 1
4. Retrouver  $U_{EM}$  en utilisant la densité d'énergie électromagnétique  $w$  dans l'état initial et dans l'état final
5. En appliquant la loi de Faraday au contour rectangulaire  $C'$  représenté en pointillés sur la figure ci-contre, montrer que les champs déterminés à la question 1 ne peuvent convenir que si  $\ddot{q}(t) = 0$



16x9

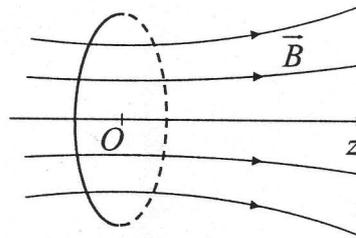
### Cerceau chargé et mobile dans un champ magnétique inhomogène (\*)

Dans une zone de l'espace située au voisinage du point  $O$  règne un champ magnétique à symétrie cylindrique d'axe  $Oz$ . En un point  $M$  de coordonnées

$$(\rho, \theta, z), \text{ les composantes de } \vec{B} \text{ valent } B_z = B_0 \left( 1 - \frac{z^2}{a^2} \right), B_\rho = B_0 \frac{\rho z}{a^2} \text{ et } B_\theta = 0.$$

Un cerceau isolant filiforme de rayon  $R$ , de masse  $m$  porte une charge  $Q$  uniformément répartie. Situé initialement dans le plan  $z=0$ , ce cerceau est animé à cette date d'un mouvement de translation de vitesse  $\vec{v}(t=0) = v_0 \vec{u}_z$ .

Dans tout le problème, on néglige le champ de pesanteur.



- Montrer que le cerceau se met à tourner autour de l'axe  $Oz$  tout en lui restant perpendiculaire. Relier sa vitesse angulaire de rotation  $\omega(t)$  au déplacement  $z(t)$  de son centre.
- Étudier l'évolution de la vitesse  $\dot{z}$  du centre du cerceau. Expliciter l'amplitude maximale  $z_M$  du mouvement en fonction des données de l'énoncé.
- Déterminer la période  $T$  du mouvement, d'abord à l'aide de  $v_0$ ,  $z_M$  et de

$$\alpha = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} \approx 1,31, \text{ puis en fonction des données de l'énoncé.}$$