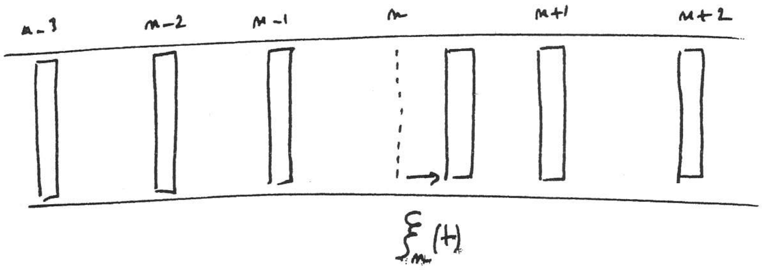
TD n°5 Ondes – Phénomènes non-dispersifs EVH/PC/09-10

Exo 1 Un modèle de propagation du son dans l'air



Modélisation de la propagation du son : un tuyau cylindrique, de section S est partagé en une infinité de compartiments identiques par des pistons de masse m, équidistants au repos d'une longueur a. Dans chaque compartiment se trouve un gaz parfait évoluant de façon adiabatique réversible avec un coefficient γ supposé constant, sa pression à l'équilibre est P_0. Chaque piston d'indice n se déplace de $\xi_n(t)$. Calculer, au premier ordre près, la pression de part et d'autre de ce piston, puis mettre en équation son mouvement. Que devient cette équation après passage au continu ?

Que donne comme vitesse du son ce modèle si l'on assimile m à la masse de gaz contenue dans un compartiment ? Numériquement on donne $\gamma = 1,4$, $P_0 = 10^5$ Pa et masse volumique de l'air $\mu_0 = 1,3\,\mathrm{kg/m^3}$.

Exo 2 Ondes longitudinales dans un ressort.

Un ressort horizontal, de longueur à vide L, a une extrémité fixe O et une extrémité mobile M accrochée à une masse ponctuelle m se déplaçant sans frottements sur l'axe Ox. On note μ la masse linéique du ressort. Le mouvement de la spire qui, au repos, est à l'abscisse x est noté $\xi(x,t)$. Si l'on coupe par la pensée le ressort à ce niveau, la partie droite exerce sur la partie gauche une force donnée par la loi de HOOKE à savoir :

$$F = K\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Montrer que ξ est solution d'une équation de d'ALEMBERT.

Quelles sont les conditions imposées à la fonction ξ en $x = 0$ et en $x = L$? On cherche une solution en $\xi(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$; déterminer, à une constante multiplicative près, $f(x)$ en fonction de x, c et ω ; montrer que ω est solution de :

$$\tan(\omega L/c) = K/(m\,\omega\,c)$$

qu'on résoudra graphiquement.

On suppose que $\mu L \ll m$ et $\omega \ll c/L$. On utilise le développement limité $\tan(u) = u + u^3/3$. Montrer que l'on se ramène à un ressort sans masse accroché à une masse m^* que l'on déterminera.

Exo 3 Miscellanées d'une perle sur une corde.

① Au point d'abscisse $x = 0$ d'une corde très longue, de masse linéique μ, est attachée une masse m (par exemple une perle enfilée sur une corde).

On appelle $y(x,t)$ le déplacement transversal de la corde par rapport à sa position d'équilibre.

Une onde incidente $y_i(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$ arrive du côté $x < 0$. Déterminer l'expression du coefficient de réflexion. Que se passe-t-il si m tend vers l'infini ?

② La corde est accrochée à un mur au point d'abscisse $x = 0$ et tendue par une force de module T. Une onde incidente $y_i(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$ arrive du côté $x < 0$. Quelle est l'expression de l'onde réfléchie ?

Au point d'abscisse $x = -d$ $(d > 0)$ est attachée une masse m soumise à une force de frottement visqueux du type

$$F = -f \frac{\partial y}{\partial t}, \text{ où } y \text{ désigne l'ordonnée de la masse } m.$$

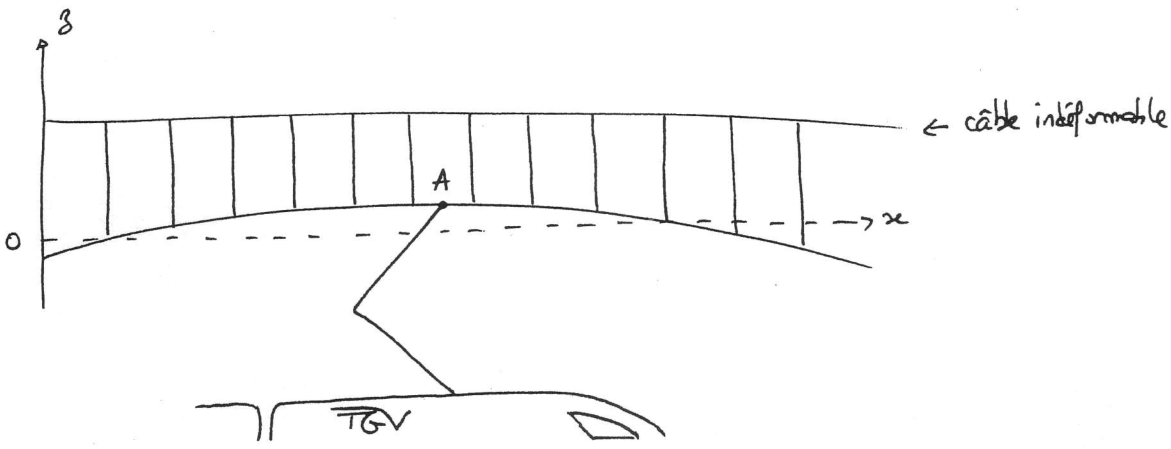
Montrer qu'il est possible de supprimer l'onde réfléchie dans la zone $x < -d$ en imposant des relations convenables entre les grandeurs k, μ, ω, T, m, d et f.

③ La corde est maintenant de longueur L fixée en ses extrémités et tendue avec une tension T.

On place la perle au milieu de la corde. On néglige la pesanteur.

Déterminer les modes propres de ce système. Comparer avec le cas de la corde non-lestée.

Exo 4 Alimentation caténaire d'un TGV



On modélise le système d'alimentation d'un TGV par un cable, horizontal au repos, de masse linéïque μ, tendu avec la tension T et suspendu par de petits cables verticaux régulièrement espacés à un gros cable horizontal indéformable. On étudie les mouvements verticaux $z(x,t)$ du cable ; son mode de suspension, dit suspension caténaire, exerce sur une longueur élémentaire $\mathrm{d}x$ une force verticale $-K\, z(x,t)\, \mathrm{d}x$. Montrer que l'on arrive à une équation :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{z}{\delta^2}$$

Le TGV, en mouvement à vitesse constante V, inférieure à c, appuie sur le cable en un point A de coordonnées $(Vt, z(Vt,t))$ et exerce sur celui-ci une force verticale constante F. On cherche à l'équation ci-dessus une solution de la forme $z = f(x - Vt)$; interpréter cette démarche et trouver l'équation différentielle vérifiée par f. Trouver f pour $x > Vt$ et pour $x < Vt$, à une constante mutiplicative près ; on posera $\Delta = \delta\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

Le contact entre le bras d'alimentation du TGV et le cable est régi par l'équation suivante où $u = x - V\,t$:

$$F + T\left\{ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{u=0^+} - \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{u=0^-} \right\} + \mu V \left\{ \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{u=0^+} - \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{u=0^-} \right\} = 0$$

On justifiera cette relation quand on le voudra après le cours sur les systèmes ouverts. Trouver la constante multiplicative évoquée plus haut et montrer qu'au-delà d'une certaine vitesse, il y a risque de perte de contact avec le cable.