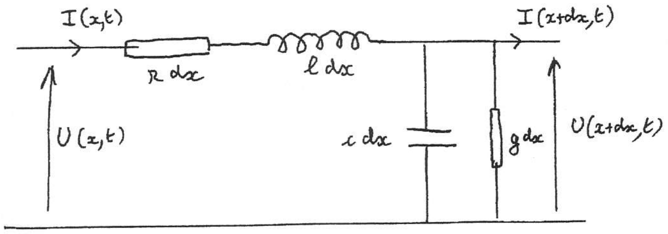
TD Phénomènes dispersifs   EVA/PC/09-10

Exo1 Optimisation d'une ligne téléphonique



On modélise une portion de longueur dx de ligne électrique à haute fréquence par la figure ci-dessus,

où r, l, c et g désignent respectivement une résistance, une inductance, une capacité et une conductance *linéïques*. Trouver deux équations aux dérivées partielles vérifiées par la tension $U(x,t)$ et par l'intensité $I(x,t)$.

En déduire que $U(x,t)$ (ou $I(x,t)$) vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = r\,g\,U + (r\,c + g\,l)\frac{\partial U}{\partial t} + l\,c\,\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

On recherche une solution propagative en $\exp i\,(\omega\,t - k\,x)$. Quelle relation lie ω, k et les constantes du problème ? Que signifient les faits que k soit complexe et que k ne soit pas proportionnel à ω ?

On suppose que les rapports $\frac{r}{l\,\omega}$ et $\frac{g}{c\,\omega}$ sont petits devant 1. Faire un développement limité donnant k à l'ordre 2 ; on pourra y poser $l\,c = \frac{1}{v_0^2}$. En déduire les expressions de la distance caractéristique d'amortissement et de la vitesse de phase en fonction de ω et des constantes du dispositif.

A quelle condition sur r, l, c et g le milieu n'est-il quasiment pas dispersif ? Quel intérêt peut avoir cette étude pour la téléphonie analogique ?

Exo 2 Corde vibrante élastique

Un dispositif non précisé ajoute à la modélisation du cours une force de rappel élastique à un élément de longueur dx de corde vibrante ; avec les notations du cours, cette force a pour expression :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}x} = -\kappa\,y\,\vec{e_x}$$

où κ est une constante. Que devient l'équation de propagatrion ?

On cherche une solution propagative sinusoïdale en $\exp \jmath\,(\omega\,t - k\,x)$. Quelle relation lie ω, k et les constantes du problème ?

Le milieu est-il absorbant ? Etait-ce prévisible ? Est-il dispersif ?

Tracer les courbes donnant la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction de la pulsation. Montrer l'existance d'une «pulsation de coupure».

Exo 3 Compression d'un train d'onde

Une impulsion lumineuse émise en $x = 0$ peut être modélisée par une fonction :

$$E(0,t) = E_m \exp(-a\,t^2)\,\cos(\omega_0\,t + b\,t^2)$$

On définit la pulsation instantanée par $\omega(t) = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ où φ est la phase. Montrer que l'onde est modulée linéairement avec le temps. On découpe l'impulsion en succession de trains d'onde entre t et $t + \mathrm{d}t$ de pulsation $\omega(t)$ et se propageant à la vitesse de groupe $V_g(\omega)$. On suppose que :

$$k(\omega) = k_0 + k_1 \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right) + (1/2)\,k_2 \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2$$

exprimer $V_g(\omega)$. A quelle condition les trains d'onde arrivent-ils tous à la distance L de l'émetteur en même temps ? On assiste alors à une compression du signal.