Exercices

Electromagnétisme

Ondes électromagnétiques

Exo 1 Propagation d'une onde dans l'ionosphère

L'ionosphère peut être considérée comme un plasma froid formé d'électrons de charge $-e$ et d'ions de charge $+e$, le nombre d'électrons par unité de volume (égal au nombre d'ions par unité de volume) est n à l'équilibre. On admet que $\varepsilon_r = \mu_r = 1$ et on néglige les collisions entre particules.

On étudie la propagation d'une onde plane de vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$. De façon générale, on décomposera une grandeur vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{L}}$ en une composante $\overrightarrow{\mathrm{L}_{||}}$ parallèle à $\overrightarrow{k}$ et un composante $\overrightarrow{\mathrm{L}_{\perp}}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{k}$.

1. A quelle condition l'action du champ magnétique sur les particules chargées est-elle négligeable en module devant l'action du champ électrique ? De même, à quelle condition peut-on considérer que le mouvement des ions est négligeable devant celui des électrons ? Par la suite, on considérera que les deux conditions précédentes sont remplies.
2. Calculer la densité de courant $\overrightarrow{j}$ dans le plasma et la conductivité σ du milieu.
3. Montrer que, de façon générale, l'onde plane qui se propage dans le plasma est une onde TEM, mais on peut avoir une solution $\mathrm{E}_{||}$ non nulle avec $\mathrm{B}_{||} = 0$ pour une valeur particulière de $\omega = \omega_p$. Que se passe-t-il localement au sein du plasma pour cette pulsation particulière ?
4. Donner la relation de dispersion satisfaite pour les ondes TEM. Exprimer alors la vitesse de phase et la vitesse de groupe pour cette onde. Pour l'ionosphère $n = 5.10^{10}$ électrons.m^{-3}, calculer la fréquence minimale de communication avec un satellite.
5. Soit un interface vide-plasma caractérisé par $z = 0$, définir l'indice n_1 du vide et l'indice n_2 du plasma. Exprimer les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude (r et t) d'une onde plane polarisée rectilignement selon x arrivant sur l'interface sous incidence normale. En déduire les coefficients de réflexion et de transmission énergétiques (R et T).
6. L'onde arrive maintenant sous incidence i sur le dioptre. Quelle est la condition sur i et ω pour que l'onde transmise existe (ie pour que qu'une station au sol puisse transmettre des informations à un satellite) ?

Exo 2 Réflexion d'une onde quelconque sur un métal parfait

Une oppm de pulsation ω se réfléchie normalement sur un plan métallique parfaitement conducteur.

1. Quels sont les champs réfléchis et les champs totaux
2. Que se passe-t-il dans le plan métallique
3. L'onde est polarisée circulairement, calculer le vecteur de Poynting. Conclusion ?

Exo 3 Réflexion normale d'une onde hertzienne par un miroir métallique réel - formule de Hagen-Rubens

On considère un conducteur homogène de conductivité $\sigma = 10^7$ S.m^{-1} soumis aux champs d'une onde électromagnétique de longueur d'onde comprise entre $\lambda_1 = 30$ cm et $\lambda_2 = 3$ km.

I - Montrer que, compte tenu des valeurs numériques, le champ électrique obéit à l'équation suivante :

$$\Delta \overrightarrow{\mathrm{E}} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t}$$

II - Une onde électromagnétique plane caractérisée par le champ :

$$\overrightarrow{\mathrm{E}_{\mathrm{i}}} = \mathrm{E}_{\mathrm{i}} e^{\left(-j\omega(t-\frac{z}{c})\right)} \overrightarrow{u_x}$$

se propage dans le vide. En $z = 0$, elle aborde le demi-espace $z > 0$ occupé par le conducteur précédent et donne naissance à une onde réfléchie caractérisée par le champ :

$$\overrightarrow{\mathrm{E}_{\mathrm{r}}} = \mathrm{E}_{\mathrm{r}} e^{\left(-j\omega(t+\frac{z}{c})\right)} \overrightarrow{u_x}$$

ainsi qu'à une onde transmise se propageant dans le métal.

1. Donner la forme de l'onde électromagnétique transmise. On fera intervenir deux paramètres caractéristiques de cette onde qui dépendent de σ et ω : une longueur δ et une vitesse v. Calculer δ et v/c pour λ_1 et λ_2.
2. Calculer les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude, r et t, compte tenu des approximations suggéré par les résultats de la question précédente.
3. Calculer le pouvoir réflecteur R du miroir ainsi constitué (rapport de l'énergie réfléchie à l'énergie incidente). Application numérique. Comparer les résultats obtenus dans ce problème avec le miroir parfaitement conducteur.

Exo 4 Transparence des métaux dans l'ultra-violet

Un métal contient n électrons libres par unité de volume. On admet que l'équation phénoménologique du mouvement d'un électron est :

$$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = -e\overrightarrow{\mathrm{E}} - \frac{m}{\tau}\overrightarrow{v}$$

1. Commenter cette équation.
2. Montrer que le métal a une conductivité complexe $\sigma^* = \dfrac{\sigma_0}{1+j\omega\tau}$ avec $\sigma_0 = \dfrac{ne^2\tau}{m}$.
3. En déduire que la relation de dispersion est :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\omega\mu_0\sigma^*$$

4. Comment se simplifie cette relation aux hautes fréquences ? En déduire que certains métaux deviennent transparents pour l'ultra-violet. Faire une application numérique ; les ordres de grandeurs sont supposés connus.

Exo 5 Four à micro-ondes

La polarisation de l'eau est un phénomène d'orientation de son moment dipolaire. De façon phénoménologique le champ $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ et la polarisation $\overrightarrow{\mathrm{P}}$ sont liées par l'équation :

$$\tau\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{P}}}{\mathrm{d}t} + \overrightarrow{\mathrm{P}} = \chi_0\varepsilon_0\overrightarrow{\mathrm{E}}$$

avec $\tau = 1,5.10^{-10}$ s et $\chi_0 = 79$ SI.

1. Commenter. Donner l'expression de la susceptibilité complexe, puis de l'indice complexe.
2. Tracer les courbes donnant, en fonction de la fréquence, les parties réelle et imaginaire de l'indice et expliquer pourquoi le four est muni d'une antenne émettant à 3 GHz.

Exo 6 Couche anti-reflet pour lunettes

A la surface d'un verre (indice n) on dépose une couche d'épaisseur e et d'indice N de telle sorte que l'espace est divisé en trois domaines : l'air ($x < 0$) d'indice 1, la couche ($0 < x < e$) d'indice N et le verre ($x > e$) d'indice n. Une OPPM de pulsation ω polarisée rectilignement selon $\overrightarrow{u_z}$ arrive dans l'air sous l'incidence normale ; chercher des conditions sur e et N pour qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie dans l'air. Faire l'application numérique pour des lunettes de vue dans des conditions normales d'utilisation.

Exo 7 Onde évanescente

Montrer que, dans un milieu diélectrique linéaire isotrope, de permittivité relative $\varepsilon_r = n^2$, sans charges libres, non magnétique, le champ électrique vérifie :

$$\Delta \overrightarrow{\mathrm{E}} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t^2}$$

Dans un repère Oxyz de vecteurs unitaires $\overrightarrow{e}_x$, $\overrightarrow{e}_y$ et $\overrightarrow{e}_z$, on considère, dans un diélectrique d'indice n, une onde électromagnétique dont le champ électrique est de la forme :

$$\overrightarrow{\mathrm{E}}(x, y, z, t) = \mathrm{E}_0 \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y) \overrightarrow{e}_z$$

1. Quelle est sa direction de propagation ? On pourra noter ultérieurement $k_1 = k \sin i_0$ et $k_2 = k \cos i_0$. Quelle relation lie k, ω, l'indice n et la vitesse de la lumière c ?
2. Cette onde se réfléchit sur le plan $y = 0$ selon les lois de Descartes, avec la même amplitude réelle mais un déphasage de φ, la direction du champ étant inchangée. Donner l'expression du champ électrique de l'onde réfléchie.
3. Dans le demi-espace $y < 0$, se trouve de l'air d'indice 1 ; on y envisage une onde dont le champ électrique est :

$$\overrightarrow{\mathrm{E}}(x, y, z, t) = \mathrm{E}_1 \exp(\alpha y) \exp i(\omega t - k_1 x) \overrightarrow{e}_z$$

où α est réel positif. Pourquoi le coefficient de x doit-il être égal à k_1 ? Pourquoi α doit-il être positif ? Quelle relation lie α, k_1, ω et c ? Montrer que ce n'est possible que si $\sin i_0$ est supérieur à $1/n$. A quelle situation cela correspond-il ? Exprimer α en fonction de c, ω et i_0.

4. Le champ électrique est continu à la traversée du plan $y = 0$. Pourquoi ? En déduire une relation liant E_0, E_1 et le déphasage φ.
5. Dans chacun des deux milieux, calculer le champ magnétique. Justifier que le champ magnétique est continu à la traversée du plan $y = 0$. Quelles nouvelles relations en déduit-on ? L'onde incidente, donc E_0, ω et l'angle i_0 sont connus, trouver le déphasage φ de l'onde réfléchie et l'amplitude de l'onde dans l'air E_1. (On rappelle que α a déjà été calculé.)

Exo 8 Guide d'onde

Une onde électromagnétique se propage dans le vide dans la direction de Ox entre deux plans métalliques parfaits $y = 0$ et $y = a$. On recherche des ondes de la forme :

$$\overrightarrow{\mathrm{E}} = f(y, z)\cos(\omega t - kx)\overrightarrow{e}_z$$

.

1. Grâce à l'équation de Maxwell-Gauss, monter que f ne dépend pas de z.
2. Grâce à celle de Maxwell-Faraday, exprimer $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ et vérifier qu'il est de divergence nulle. Pourquoi qualifie-t-on ce type d'onde de « transversale électrique » ?
3. Déduire de l'équation de Maxwell-Ampère une équation différentielle vérifiée par $f(y)$. Quel type de fonctions en est solution ?
4. Quelles contraintes les relations de passage entraînent-elles pour $f(y)$ en $y = 0$ et $y = a$? Quelles fonctions restent possibles pour $f(y)$. On prendra par la suite la plus simple.
5. En déduire l'équation de dispersion, les expressions des vitesses de phase et de groupe en fonction de la pulsation et l'existence d'une pulsation de coupure. (Application numérique si $a = 2$ cm)
6. On rajoute deux plans métalliques parfaits $z = 0$ et $z = b$. Faut-il changer quelque chose ?
7. Calculer la puissance moyenne traversant un plan $x = \mathrm{C^{te}}$.
8. On ferme le guide d'onde par deux plans métalliques parfaits $x = 0$ et $x = \mathrm{L}$ et l'on réalise ainsi une cavité électromagnétique. Quelles sont les pulsations possibles pour l'onde stationnaire ?