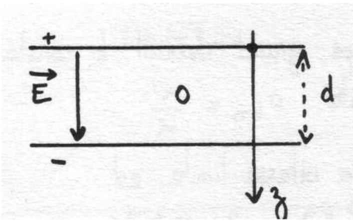
Exercices

Mécanique des fluides

Exo 1 Expérience de Millikan

On pulvérise des petites gouttes d'huile sphérique (rayon r) électrisées négativement par frottement, entre les armatures d'un condensateur plan : le champ vertical $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ est uniforme mais de valeur réglables grâce à un générateur qui permet d'établir une tension U entre les armatures séparées d'une distance d (rappel : $\mathrm{E} = \frac{\mathrm{U}}{d}$).



La goutte est soumise à trois forces : son poids ; la force électrique $q\overrightarrow{\mathrm{E}}$; une force de frottement due à la viscosité de l'air qui pour les faibles vitesses s'écrit : $\overrightarrow{f} = -6\pi r\eta\overrightarrow{v}$ où η est la viscosité de l'air, supposée constante.

1. Ecrire la relation fondamentale en projection sur Oz sous la forme : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \mathrm{K}v = \mathrm{K}'$
2. En déduire qu'au bout d'un certain temps la vitesse tend vers une valeur limite.
3. En l'absence de champ $\overrightarrow{\mathrm{E}}$, on observe une goutte tombant avec la vitesse v_l telle qu'elle parcourt 1 mm en 8,9 s. En déduire le rayon de la goutte.
4. Calculer la valeur de $\tau = 1/\mathrm{K}$ (constante de temps) et justifier le fait que la vitesse limite est rapidement atteinte.
5. Justifier l'utilisation de la formule proposée pour la force de frottement due à la viscosité de l'air.
6. Les plateaux du condensateur sont distants de $d = 6$ mm. Quelle différence de potentiel doit-on établir pour que la goutte portant une charge élémentaire soit immobile ?

Données :

Masse volumique de l'huile :	$\rho = 885$ kg.m^{-3}
Masse volumique de l'air :	$\rho_0 = 1,3$ kg.m^{-3}
Viscosité de l'air :	$\eta = 1,85.10^{-5}$ S.I.
Charge élémentaire :	$e = 1,6.10^{-19}$ C
Pesanteur terrestre :	$g = 9,8$ m.s^{-2}

Exo 2 Repassons le Certificat d'Études.

Une baignoire de 96 L se remplit en 8 mn, robinet ouvert et bonde fermée. Elle se vide en 12 mn, bonde ouverte et robinet fermé. En combien de temps se remplit-elle bonde et robinet ouverts ('faut être c... !) ?

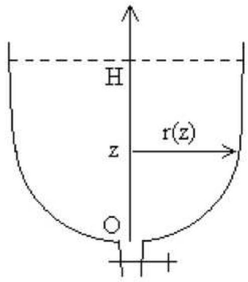
Le réponse attendue au Certificat d'Études était la suivante : le robinet débite $96/8 = 12$ L/mn, la bonde $96/12 = 8$ L/mn. Les deux ouverts le débit est $12 - 8 = 4$ L/mn, il fait donc $96/4 = 24$ mn.

Quelle réponse faut-il donner intégrer les CCP et ... rater le certif' ?

Exo 3 Vidange d'un réservoir

Un récipient a une symétrie de révolution autour de l'axe vertical Oz. Le fond du récipient est percé d'un orifice de faible section $s = 1$ cm^2. A l'instant $t = 0$ où commence la vidange, la hauteur d'eau dans le récipient est égale à H et à un instant t elle devient z.

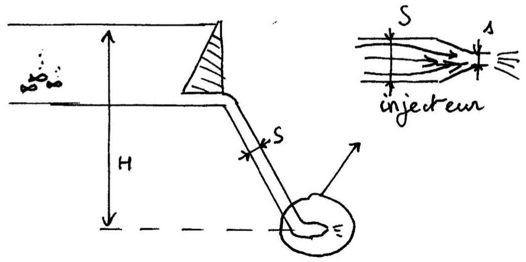
On suppose que l'eau est un fluide incompressible, non visqueux.



1. En supposant l'écoulement quasi-permanent (permanence établie pour des intervalles de temps successifs très courts) calculer la vitesse $v(z = 0)$ d'éjection de l'eau à un instant t .
2. Comparer à l'instant t, pour une surface de l'eau de cote z toujours très supérieure à la section s de l'orifice, la vitesse $v(z)$ du niveau d'eau à la cote z et la vitesse $v(z = 0)$ d'éjection. En déduire que $v(z = 0) \simeq \sqrt{2gz}$ et que l'équation différentielle donnant la hauteur d'eau est $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = - \dfrac{s\sqrt{2gz}}{\pi r^2}$.
3. Le récipient a la forme d'un cylindre de révolution de rayon $r = \mathrm{R}$. Calculer le temps de vidange si la hauteur d'eau initiale dans le récipient est H.
4. Clepsydre : le rayon r du récipient à la cote z est donné par $r = az^n$.
   (a) Déterminer les coefficients n et a pour que le niveau d'eau du récipient baisse régulièrement de 6 cm par minute.
   (b) Quelle est la hauteur minimale $z = h$ d'eau dans le récipient pour que $\dfrac{v(z)}{v(z=0)} \leqslant 1\%$.
   (c) Quel volume d'eau doit-on mettre dans le récipient pour que le temps d'écoulement de l'eau entre la hauteur H et la hauteur h soit de 15 minutes ?
   (d) Quelle a pu être l'utilité de cet appareil ?

Exo 4 Conduite forcée.

Une conduite forcée de section S réunit un lac dont la surface se trouve à une altitude H de l'ordre de 100 m et un injecteur, c'est-à-dire une fin de canalisation conique amenant la section de la valeur S à une valeur s environ dix fois plus faible. (cf figure ci-dessous)



Calculer la vitesse de l'eau à la sortie de l'injecteur où l'eau se retrouve à la pression atmosphérique.

Calculer le débit d'énergie cinétique.

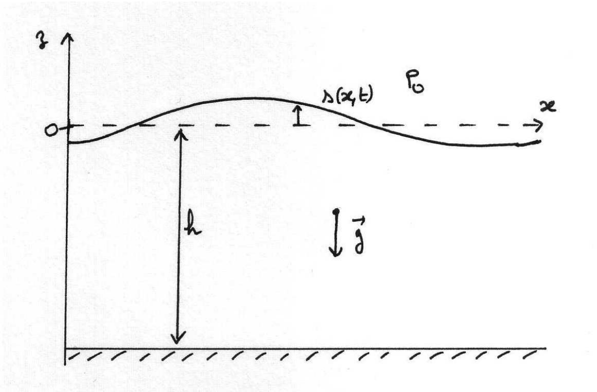
Calculer la pression en un point de la canalisation d'altitude z et comparer à ce qu'on aurait obtenu sans l'injecteur ; en déduire l'intérêt de celui-ci.

Exo 5 Dépressions et anticyclones.

On s'intéresse aux mouvements de l'air à l'échelle d'un pays ; quel terme faut-il rajouter à l'équation d'Euler pour tenir compte de la force de Coriolis ? Si le vent n'est pas trop violent, justifier qu'on peut négliger le terme non-linéaire. On suppose l'écoulement permanent et incompressible et quasiment horizontal (on est en plaine) ; montrer qu'en projection sur le plan horizontal, la direction du vent est tangente aux coubes isobares et justifier la longévité des dépressions et anticyclones. Dans quel sens le vent tourne-t-il autour des dépressions, des anticyclones, dans l'hémisphère nord et dans le sud ?

Exo 6 Ondes à la surface d'un liquide

Cette étude concerne la propagation suivant Ox d'une onde d'amplitude du mouvement vertical a, de longueur d'onde λ dans un plan d'eau infini, de profondeur h constante. Le fond est en $z = -h$ et la surface libre avec l'atmosphère, qui maintient une pression P_0, a pour équation $s = s(x, t)$ autour de $z = 0$ (surface d'équilibre).



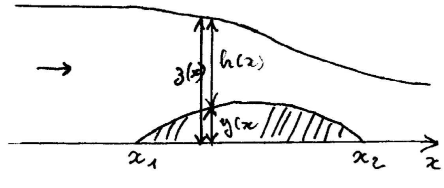
L'eau est un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ.

Dans le cadre des hypothèses retenues, $a \ll h \ll \lambda$, la recherche d'une onde plane progresssive pour $s(x,t)$ conduit à prendre la vitesse particulaire $\mathbf{v}$ sous la forme $\mathbf{v} = u(x,t)\,\mathbf{u_x} + v(x,z,t)\,\mathbf{u_z}$.

1. Traduire l'incompressibilité de l'écoulement. En déduire v et montrer que $v \ll u$ quelquesoit z. En déduire également que
$$\frac{\partial s}{\partial t} + h\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$
2. Projeter l'équation d'Euler linéarisée sur les deux axes et en déduire, en se servant de v/llu, l'expression du champ de pression $\mathrm{P}(x,z,t)$ où intervient en particulier $s(x,t)$.
3. Déduire des questions précédentes l'équation différentielle vérifiée par $s(x,t)$. Donner l'expression de la vitesse de propagation c.

$\boxed{\text{Exo 7}}$ Écoulement de l'eau d'un canal

1. De l'eau s'ecoule dans un canal à fond horizontal de direction Ox, de largeur variable $\mathrm{L}(x)$. On note $h(x)$ la hauteur d'eau et $v(x)$ sa vitesse. En exploitant la relation de Bernoulli et la conservation de la masse, montrer que :
$$(\mathcal{F}^2 - 1)\frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{L}}$$
où $\mathcal{F} = \sqrt{gh}$ s'appelle nombre de Froude.
Comment doit varier L pour que v augmente ?
2. Au fond du même canal, qui a désormais une largeur constante, existe une bosse entre x_1 et x_2 de hauteur $y(x)$. On note $h(x)$ la hauteur d'eau au dessus de la bosse et $z(x) = h(x) + y(x)$ sa hauteur absolue (voir figure suivante).



Avec la même méthode montrer que :

$$(gh(x) - v^2(x))\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = gv(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

On pose $\mathcal{F}(x) = \dfrac{v(x)}{\sqrt{gh(x)}}$, montrer que :

$$(\mathcal{F}^2 - 1)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

et

$$(\mathcal{F}^2 - 1)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \mathcal{F}^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

En déduire le profil de la surface de l'eau au dessus de la bosse selon que F passe ou non par la valeur 1.

Exo 8 Implosion d'une bulle

Au voisinage d'une hélice, de brutales chutes de pression provoquent l'évaporation de l'eau et la formation de bulles ; ce phénomène s'appelle la cavitation. Ultérieurement, au retour d'une pression normale, les bulles implosent et c'est ce phénomène que nous étudions.

Dans un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ, on considère une bulle sphérique de gaz de centre O et de rayon $a(t)$ au cours du temps. Le problème reste à symétrie sphérique et en un point M de fluide, le champ des vitesses (nul à l'infini) s'écrit $\mathbf{v}(\mathrm{M}, t) = v(r, t)\,\mathbf{u_r}$, $\mathbf{u_r}$ étant le vecteur unitaire radial. L'influence du champ de pesanteur est négligée. On suppose que dans le fluide, à l'infini, la pression est constante P_0 ; par ailleurs la pression dans la bulle est prise nulle.

1. Déterminer la vitesse $\mathbf{v}$ à la distance r de l'origine en fonction de $a(t)$ et $\dot{a}(t) = \dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$. En déduire que le mouvement du fluide est irrotationnel.
2. Calculer l'énergie cinétique totale $\mathcal{E}_\mathrm{C}$ du fluide.
3. Calcule la puissance $\mathcal{P}$ que les forces de pression fournissent au fluide contenu dans une sphère de rayon r concentrique à la bulle en fonction de la pression $\mathrm{P}(r, t)$ et de la fonction $a(t)$.
4. En utilisant les deux questions précédentes, déterminer l'expression de $\dot{a}(t)$ sachant qu'à l'instant initial, pour la bulle, $a(0) = a_0$ et $\dot{a}(0) = 0$.
5. Calculer le temps τ que met la bulle à disparaître, en posant $x = a/a_0$, sachant que $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1 - x^3}} \simeq 0{,}75$, $\rho = 10^3$ kg.m^{-3}, $a_0 = 1$ mm et $\mathrm{P}_0 = 10^5$ Pa.

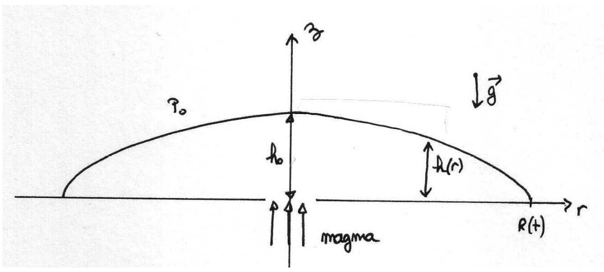
Exo 9 Croissance d'un dôme de magma

Nous étudions ici un type de volcan parmi les plus dangereux, ceux qui produisent des éruptions explosives. Ces éruptions émettent des laves andésitiques, riches en silice et donc très visqueuses et libérant leurs gaz volcaniques difficilement.

Pour un type d'éruption particulier, dite péléenne, la lave pâteuse ne s'écoule quasiment pas et a tendance à former un dôme de lave. Celui-ci, sous la pression du magma, peut se désagréger ou exploser en produisant des nuées ardentes et des panaches volcaniques. Très meurtrier en raison du caractère instable de l'éruption et de la vitesse des nuées ardentes, l'éruption type est celle de la montagne Pelée qui fit 28 000 morts en 1902 en Martinique.

Les volcans ayant des éruptions peléennes sont la montagne Pelée, la Soufrière de Montserrat, la Soufrière de la Guadeloupe, etc.

Le magma est assimilé à un fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité η très élevée. On suppose que le dôme de lave admet une symétrie de révolution autour de la verticale et on note $h_0(t)$ sa hauteur maximale au centre et $\mathrm{R}(t)$ son rayon.



On souhaite établir une loi de variation entre $h_0(t)$ et $\mathrm{R}(t)$ à partir de l'équation de Navier-Stokes. Pour cela, on admet que les termes visqueux dominent sur les termes inertiels et on utilise les arguments d'analyse dimensionnelle pour relier les paramètres du problème. L'écoulement est supposé quasi-radial et U désigne l'ordre de grandeur de la vitesse.

1. Établir la loi de pression $\mathrm{P}(r, z)$ au sein du dôme en notant P_0 la pression atmosphérique et $h(r)$ la hauteur à la distance r. En déduire *en ordre de grandeur* l'expression de la composante horizontale de la résultante des forces de pression sur une particule de fluide de volume $\mathrm{d}\tau$ en fonction de ρ, g, h_0, R et $\mathrm{d}tau$.
2. Exprimer de la même façon *en ordre de grandeur* la force de viscosité sur une particule de fluide de volume $\mathrm{d}\tau$ en fonction de U, η, h_0 et $\mathrm{d}tau$.
3. En déduire, *en ordre de grandeur* :

$$\frac{\mathrm{R}}{h_0^3}\frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{d}t} = \frac{\rho g}{\eta}$$