

Exercices

Ondes sonores dans les fluides

Exo 1 Acoustique géométrique

Le son direct au niveau du sol est rapidement atténué par les obstacles. Curieusement, une explosion puissante est souvent mieux perçue loin de la source que près de la source. Interpréter qualitativement en supposant que les ondes sonores émises vers le haut rencontrent pour des altitudes comprises entre 50 et 80 km des couches d'air où la température croît avec l'altitude.

Une habitation est séparée d'une voie TGV par des barres d'immeuble. Les habitants de cette maison entendent-ils mieux le train le matin ou le soir ?

Exo 2 La bouteille qui chante

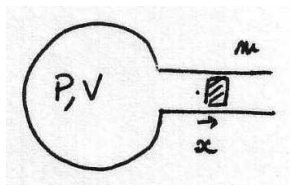
Lorsqu'on remplit une bouteille d'eau, on constate que le son qu'elle émet est de plus en plus aigu. Interpréter à l'aide d'un modèle sommaire.

Exo 3 Bruit d'une chute d'eau

Lorsqu'on approche son oreille d'une paroi rocheuse plane à proximité d'une chute d'eau (assimilable à une source « blanche », ie à spectre large), le bruit semble amplifié et il devient de plus en plus aigu lorsqu'on s'approche de la paroi. On suppose que des ondes stationnaires apparaissent au voisinage de la paroi pour toutes les fréquences f du spectre. Quelle est l'origine de ces ondes ? À f fixée, quelle est la position du ventre de pression le plus proche de la paroi ? Interpréter les observations.

Exo 4 Résonateur de Helmholtz

On considère le récipient représenté sur la figure ci-dessous : un piston de masse m peut coulisser sans frottement à l'intérieur de la partie cylindrique d'un tube de section s , d'axe horizontal, relié à un récipient. Le récipient est rempli d'air, l'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M ; on désigne par γ le rapport c_P/c_V supposé constant.



La position du piston est repérée par son abscisse x . Lorsque le piston est à sa position d'équilibre $x = 0$, le volume total d'air « emprisonné » est V_0 et la pression intérieure est $P = P_e$ où P_e est la pression extérieure. Si l'on écarte le piston de sa position d'équilibre, il va osciller.

1. En admettant que le gaz compris à l'intérieur du récipient évolue de façon adiabatique et que la pression reste uniforme, calculer la période des petites oscillations.
2. En admettant que pour un récipient muni d'un col cylindrique de longueur l , et de section s (col libre, non fermé par un piston), on peut adopter le modèle précédent en prenant pour masse m la masse d'air comprise dans le col, donner l'expression approchée de la fréquence de cet oscillateur. Proposer une application numérique raisonnable.
3. Quelle condition doit être satisfaite pour que l'on puisse supposer la pression uniforme dans le récipient ?

Exo 5 Amortissement par viscosité des ondes sonores

En acoustique, la vitesse particulaire $\vec{v}$, l'écart de masse volumique $\mu' = \mu - \mu_0$ et la surpression $p = P - P_0$ sont des infiniment petits du premier ordre.

1. Rappeler (sans démonstration, ni approximations) les trois équations à trois dimensions de l'acoustique pour un fluide visqueux, puis les linéariser en négligeant tout terme d'ordre supérieur à 2, sans tenir compte du poids et en introduisant la grandeur $c^2 = 1/\mu_0 \chi_S$.
2. Établir l'équation de propagation de la surpression. Commenter.
3. Introduire la grandeur $\tau = \eta/\mu_0 c^2 = \nu/c^2$ et donner sa valeur numérique pour l'air pour lequel à 20°C, $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. En déduire que dans le domaine audible, $\omega\tau \ll 1$.

On cherche des solutions harmoniques de cette équation sous forme d'ondes planes : $\underline{p} = p_0 \exp j(kx - \omega t)$ avec ω réel.

4. À quelle équation de dispersion satisfont-elles ?
5. Déterminer l'expression approchée de k sous la forme $k \simeq k_0 + j\alpha$ où k_0 et α sont réels. Commenter l'expression de k_0 ; quelle est la vitesse de phase des ondes ? Quelle est l'expression du coefficient d'atténuation α ?
6. AN : En déduire la valeur numérique de la longueur δ sur laquelle l'atténuation est sensible pour la fréquence $f = 1 \text{ kHz}$; que devient-elle pour $f = 10 \text{ kHz}$? Commenter.

Exo 6 Isolation phonique

Pour étudier l'atténuation sonore introduite par un mur, on adopte le modèle sommaire suivant : dans un tuyau de section S , une onde sonore incidente plane progressive harmonique de pulsation ω arrive sur un piston de surface S , d'épaisseur e et de masse volumique μ , libre de se déplacer au voisinage de $x = 0$. On cherche un champ des vitesses de la forme :

$$\underline{v}_1(x < 0, t) = A_1 \exp(j\omega t - jkx) + \underline{B}_1 \exp(j\omega t + jkx)$$

$$\underline{v}_1(x > e, t) = \underline{A}_2 \exp(j\omega t - jkx + jke)$$

1. Justifier cette forme et écrire les surpressions $\underline{p}_1(x, t)$ correspondantes.
2. Écrire les conditions aux limites sur le piston indéformable et en déduire que :

$$\frac{\underline{A}_2}{\underline{A}_1} = \left(1 + \frac{\mu e j \omega}{2 \mu_0 c}\right)^{-1}$$

3. En déduire le facteur de transmission en puissance T du mur. On donne $\mu_0 = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$, $\mu = 2 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$. Quelle doit-être l'épaisseur du mur si on veut une atténuation d'au moins -40 dB pour $f = 1 \text{ kHz}$. Pourquoi ai-je l'impression que mon voisin a la voix grave ?

Exo 7 Ondes sonores sphériques

Une sphère pulsante de centre fixe O dont le rayon $a(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t)$ varie sinusoidalement avec une amplitude $a_1 \ll a_0 \ll \lambda$, émet des ondes sonores dans tout l'espace extérieur à la sphère, rempli d'air de masse volumique μ_0 où la célérité des ondes sonores vaut c . Compte tenu de la symétrie du problème, on cherche en coordonnées sphériques de centre O des champs de la forme $p_1(M, t) = p_1(r, t)$ et $\mathbf{v}(M, t) = v_1(r, t)\mathbf{u}_r$. On rappelle que pour un champ scalaire $f(r, t)$ ne dépendant ni de θ , ni de φ en coordonnées sphériques, le laplacien peut s'écrire :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r f(r))}{\partial r^2}$$

1. Déterminer la forme générale des solutions $p_1(r, t)$ de l'équation de d'Alembert et interpréter. Justifier qu'on doit choisir $p_1 = \frac{1}{r} f(r - ct)$.
2. Dans la suite, on pose $k = \omega/c$ et on cherche une solution de la forme $p_1 = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr - \alpha)$.
 - (a) Déterminer l'expression correspondante du champ des vitesses. En déduire les expressions simplifiées qu'on adoptera dans la suite :

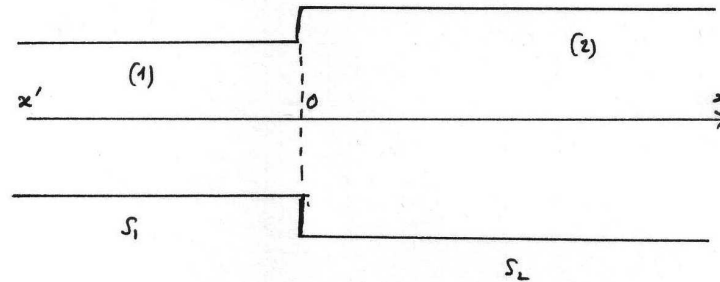
$$v_1(r \ll \lambda, t) = \frac{A}{\mu_0 \omega r^2} \sin(\omega t - kr - \alpha)$$

$$v_1(r \gg \lambda, t) = \frac{kA}{\mu_0 \omega r} \cos(\omega t - kr - \alpha)$$

- (b) Justifier brièvement la condition aux limites approchée $v_1(r = a_0, t) = \dot{a}(t)$. En déduire les expressions de A et α .
3. Exprimer la puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de centre O et de rayon $r \gg \lambda$. Commenter l'influence de r . Comparer la surface nécessaire pour émettre un son grave et un son aigu de même puissance.
 4. Exprimer l'impédance complexe $\underline{Z}_R = \underline{p}_1/\underline{v}_1$ au niveau de la membrane et la comparer à l'impédance $\underline{Z}_{\text{OPP}}$ des ondes planes progressives. En déduire pourquoi on peut considérer qu'on a un nœud de pression à l'extrémité d'un tuyau ouvert sur une atmosphère, sont la section a pour dimension typique $a_0 \ll \lambda$.

Exo 8 Discontinuité de section dans un tuyau sonore

Un tuyau sonore est composé de deux parties cylindriques, de même axe $x'Ox$ et de sections respectives S_1 et S_2 , raccordées en $x = 0$ avec discontinuité. Soit ρ_0 la masse volumique du fluide dans le tuyau et c la célérité des ondes acoustiques (cf. figure suivante).



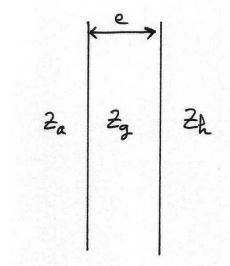
Une onde acoustique plane sinusoïdale incidente se propage dans la partie (1) dans le sens des x croissants ; soit p_1 sa pression en notation complexe. La discontinuité en $x = 0$ donne naissance à une onde réfléchie de pression p'_1 et une onde transmise de pression p_2 ; ces ondes sont supposées planes.

1. Justifier qu'en $x = 0$ la pression est continue.
2. Les résultats expérimentaux sont compatibles avec une continuité du débit massique, qu'il est difficile de justifier théoriquement et nous admettons donc cette continuité. Déterminer les coefficients de réflexion r et de transmission t relatifs aux amplitudes de pression en fonction de S_1 et S_2 .
3. Déterminer les coefficients de réflexion $R = |r|^2$ et de transmission $T = |t|^2$ pour les intensités acoustiques.

Exo 9 Couche anti-reflet en échographie

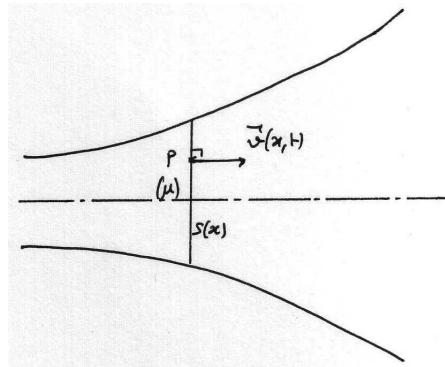
L'impédance acoustique de l'air est d'environ $Z_a = 400$ S.I. et celle de l'organisme humain d'environ $Z_h = 106$ S.I.

Montrer que sans artifice l'échographie par ultrasons est impossible.



On étale sur la peau du patient un gel d'épaisseur e et d'impédance acoustique Z_g (cf figure). Montrer qu'un choix convenable permet d'éliminer la réflexion donc de favoriser la transmission.

Exo 10 Onde dans un pavillon exponentiel



Une onde quasi-plane acoustique se déplace dans un tuyau de section lentement variable $S(x)$ (cf figure) de sorte que la vitesse puisse être considérée comme presque parallèle à l'axe Ox . On note comme dans le cours :

$$p = p_0 + p_1(x, t)$$

$$\mu = \mu_0 + \mu_1(x, t)$$

$$\vec{v} \simeq v_1(x, t) \vec{u}_x$$

1. Simplifier l'équation d'Euler dans le cadre de l'approximation acoustique, ainsi que l'équation d'évolution adiabatique.
2. Pourquoi l'équation de conservation de la masse nous conduirait-elle à une erreur subtile? La remplacer par un bilan de masse entre les abscisses x et $x + dx$, expliquer pourquoi on ne risque plus l'erreur et en déduire, dans l'approximation acoustique, que :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = \mu_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{v_1}{S(x)} \frac{dS(x)}{dx} \right)$$

3. En déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par p_1 .
4. On se place dans le cas d'un pavillon exponentiel pour lequel $S(x) = S_0 \exp(x/a)$. À quelle condition est-il réellement à section lentement variable? Etudier la possibilité d'une onde plane en $\exp j(\omega t - kx)$ et discuter selon les valeurs de la pulsation.

Exo 11 Tuyau à section carré aux fréquences aiguës

Un tuyau sonore orienté selon Ox a une section carrée ($0 < y < a$ et $0 < z < a$). On travaille à des fréquences pour lesquelles a n'est plus négligeable devant la longueur d'onde et l'on étudie la possibilité d'ondes non planes.

On pose avec les notations du cours :

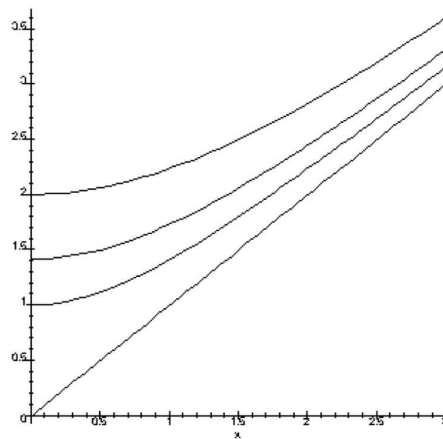
$$p_1(x, y, z, t) = f(y)g(z) \exp j(\omega t - kx)$$

1. Quelle est la condition imposée à la vitesse par les parois ? Qu'en déduit-on pour les fonctions f et g ? Montrer que la relation de dispersion s'écrit :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{\pi^2}{a^2}(m^2 + n^2)$$

où m et n sont deux entiers et c la vitesse du son. On appelle « mode $\{m, n\}$ » le type d'onde correspondant au couple (m, n) .

2. On note $\omega_c = \pi c/a$ et l'on trace les courbes (graphe ci-dessous) avec $x = ka/\pi$ en abscisse et $y = \omega/\omega_c$ en ordonnée. Associer à chacune des courbes les premiers modes, soit les modes $\{0, 0\}$, $\{0, 1\}$, $\{1, 0\}$, $\{1, 1\}$, $\{2, 0\}$ et $\{0, 2\}$.
3. On considère un tuyau d'orgue à section carré de côté a et de longueur L . A quelle condition émet-il un son harmonieux, c'est-à-dire n'émettant que des multiples d'un fondamental audible par l'oreille humaine (dans la plage 20 Hz - 20 kHz) ?



Exo 12 Effet Doppler et bang sonore

Une source d'ondes sonores S de période T est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $\mathbf{v}$ dans l'air où la célérité du son vaut c , de telle sorte que $S(x_S = vt, y_S = 0, z_S = d)$ avec v et d constantes. L'observateur est fixe en O .

1. Montrer que la différence dt' des dates d'arrivée en O de deux ondes émises par S aux instants t et $t + dt$ vaut à l'ordre 1 en dt :

$$dt' = dt \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c} \right)$$

où $\mathbf{u}$ est un vecteur unitaire sur la direction $\mathbf{SO}$.

2. La source S est subsonique ($v < c$) et son déplacement vT pendant une période est faible devant OS . Montrer que la fréquence f' perçue par l'observateur et la fréquence f émise par la source mobile sont distinctes (effet Doppler) et exprimer leur rapport. Décrire l'évolution de f' au cours du temps et confronter le résultat aux observations.

3. La source S est un avion supersonique ($v > c$) et on perçoit en O un « Bang ! » puissant lorsque $dt'/dt = 0$. Interpréter sommairement et déterminer l'instant t où le « Bang ! » est émis et l'instant t' où il est reçu en O. Montrer que la position SO de l'avion à l'instant t' fait un angle $\alpha = \text{Arcsin}(c/v)$ avec sa vitesse $\mathbf{v}$. Retrouver le résultat en traçant sur une figure les surfaces d'ondes à l'instant t' , associées aux ondes émises par S aux instants $t_n = t' - n\tau$ avec $n = 0, n = 1, n = 2, \dots$ (τ est une durée arbitraire).

Exo 13 Écoulement subsonique ou supersonique d'un gaz - critère de Mach

Un gaz parfait et non visqueux subit une détente dans une tuyère horizontale (on néglige les effets de la pesanteur) ; l'écoulement est stationnaire.

1. Pour un élément de fluide en mouvement écrire une relation entre les différentielles de la pression et de la vitesse v .
2. Lors du déplacement, l'élément de fluide subit une transformation isentropique ; en déduire une relation entre les différentielles de P et de la masse volumique ρ en introduisant la célérité c du son dans le gaz (on rappelle que $c^2 = 1/(\rho\chi_S) = \gamma P/\rho$).
3. En notant j la densité de courant, établir l'expression de $\frac{dj}{dv}$ en fonction de ρ et du nombre de Mach $\mathcal{M} = v/c$.
4. À quelle condition l'écoulement du gaz (fluide compressible) peut-il être considéré comme incompressible ?
5. La tuyère est de section droite S variable (sur laquelle on suppose que j est uniforme). Quelle forme doit-on donner à la tuyère pour que la détente soit subsonique ? supersonique ?
6. Exprimer $\frac{dS}{S}$ en fonction de $\frac{dv}{v}$ et montrer que si l'on veut obtenir un régime supersonique à partir d'un gaz au repos, il faut que la tuyère soit d'abord convergente puis divergente.

Exo 14 Caractère optimal du réseau sanguin chez l'homme

On décrit le réseau sanguin chez l'homme en se limitant au premier embranchement : l'aorte, assimilée à une conduite cylindrique d'axe Ox et de section s_1 est alimentée en $x = 0$ par le cœur avec un débit volumique sinusoïdal $Q(x = 0, t) = Q_M \cos \omega t$ lié au rythme cardiaque ; en $x = L$ l'aorte se partage en deux artères identiques de même section $s_2/2$ équivalentes à une unique conduite cylindrique d'axe Ox et de section $s_2 \simeq 0,4s_1$; de plus on suppose les artères infiniment longues. On note c la célérité des ondes qui a la même valeur dans l'artère et l'aorte et μ_0 la masse volumique du sang.

1. Pour une onde plane progressive se propageant selon $\vec{u}_x$, montrer que le débit volumique et la surpression sont liés en notation complexe par la relation

$$\mu_0 c \underline{Q} = s \underline{p_1}$$

avec $s = s_1$ ou $s = s_2$ selon la portion du réseau sanguin étudié. Quelle est la relation analogue pour une onde plane progressive se propageant selon $-\vec{u}_x$?

2. On cherche des solutions de la forme :

$$\underline{p}_1(0 < x < L, t) = p_M \exp j(\omega t - \omega x/c) + \underline{r} p_M \exp j(\omega t + \omega x/c)$$

$$\underline{p}_1(x > L, t) = \underline{t} p_M \exp j(\omega t - \omega x/c)$$

Commenter. Exprimer les débits volumiques correspondants. En admettant la continuité en $x = L$ de la surpression et du débit volumique, exprimer le coefficient $\underline{r}$ en fonction de s_1 , s_2 , ω , L et c .

3. Montrer que l'admittance complexe $\underline{Y}(x = 0, t) = \frac{\underline{Q}(x = 0, t)}{\underline{p}_1(x = 0, t)}$ vaut

$$\underline{Y}(x = 0, t) = \left(\frac{s_1}{\mu_0 c} \right) \frac{s_1 + s_2 - (s_1 - s_2) \exp(-2j\omega L/c)}{s_1 + s_2 + (s_1 - s_2) \exp(-2j\omega L/c)}$$

Étudier les variations de $|\underline{Y}|^2$ en fonction de L . À quelle condition l'effort sur le cœur est-il minimal pour assurer un débit donné ?

4. AN : on donne $L = 1,25$ m et $c = 5$ m.s⁻¹ (N.B. : valeur très faible due à l'élasticité des parois des vaisseaux artériels qui change la mise en équation). Si $L = \lambda/4$, calculer la fréquence cardiaque idéale. Mesurer la vôtre.