TD Bilans en système ouvert EVH/PC/09-10

Exo 1 fusée Ariane

Une fusée de masse initiale M_0 (carburant et comburant compris) est propulsée à partir de $t = 0$ par l'éjection des gaz brûlés avec un débit massique D constant et une vitesse relative de module u constant. A quelle condition la fusée décolle-t-elle ? (A.N. $M_0 = 200$ tonnes, $D = 1600\,\text{kg.s}^{-1}$ et $u = 1500\,\text{m.s}^{-1}$)

On suppose le mouvement de la fusée vertical. Calculer la vitesse à l'instant t puis l'altitude atteinte à cet instant. Le carburant du premier étage est épuisé au bout de 62,5 s ; quelle est la vitesse finale et l'altitude atteinte ? (+A.N.)

Quel intérêt y a-t-il à concevoir des fusées à étages ?

Exo 2 Tourniquet hydraulique

Un tourniquet est formé de deux branches de rayon R, éjectant chacune, à une vitesse relative u orthoradiale vers l'arrière, de l'eau avec un débit massique $D/2$. Il est alimenté par une canalisation verticale fixe amenant le débit total D (cf figure 2).

La liaison entre canalisation d'amenée et tourniquet est supposée sans frottement et sans fuite (le beurre et l'argent du beurre !). On suppose le régime permanent atteint, quelle est la vitesse de rotation du tourniquet ? Montrer que s'il y a frottement, la vitesse angulaire est inférieure à celle qu'on vient de calculer.

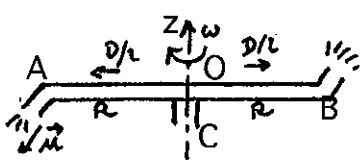


FIG. 2 –

Etudier le régime transitoire. On admettra que le moment cinétique par rapport à l'axe du tourniquet est le produit d'une constante J et de sa vitesse angulaire ω, même si le fluide coule dans les branches. On modélisera le frottement par un moment proportionnel à ω.

Exo 3 Tuyère & turbine

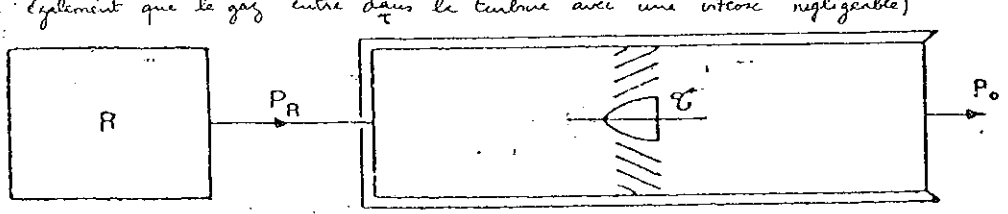
On dispose d'un réservoir isotherme R de grande capacité, contenant un gaz diatomique G, sous une pression $P_R = 25$ bars (1 bar = 10^5 Pa) et une température $T_0 = 300$ K.

On admettra dans la suite que la capacité de ce réservoir est telle qu'on pourra l'assimiler à un générateur de gaz comprimé, c'est-à-dire que la pression du gaz dans le réservoir R est indépendante de la quantité de gaz qui a pu en sortir.

On admettra de plus dans tout le problème que G est un gaz parfait de masse molaire $M = 28$ g. On prendra pour valeur de la constante des gaz parfaits $R = 8{,}31\ \text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

1. On utilise le réservoir R pour faire fonctionner un moteur à turbine : le gaz G du réservoir est envoyé dans une tuyère T calorifugée, au milieu de laquelle se trouve une turbine $\mathcal{T}$ entraînée par le gaz. Le gaz est ensuite rejeté dans l'atmosphère avec une vitesse négligeable, à la pression $P_0 = 1$ bar (fig. 3).
(on supposera également que le gaz entre dans la turbine avec une vitesse négligeable)

Figure 3



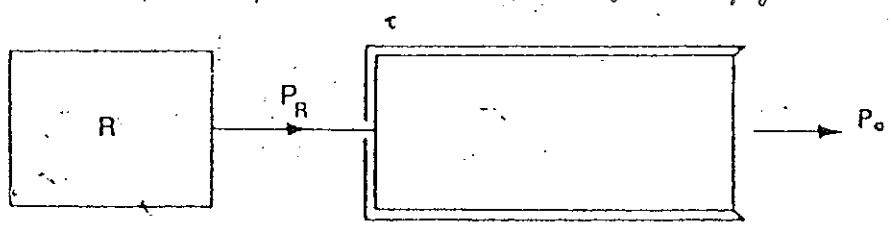
4.1. On suppose que G subit une détente adiabatique réversible. Soit W_T le travail fourni à une mole de gaz par la turbine. Faire le bilan de tous les travaux reçus par une mole de gaz (de la sortie du réservoir R à l'entrée dans l'atmosphère) et comparer W_T à la variation d'enthalpie subie par cette mole de gaz. En déduire la valeur numérique de W_T; en préciser le signe.

4.2. Pour tenir compte des irréversibilités, on admet que lors d'une détente adiabatique, la loi d'évolution est donnée par la relation $P.V^k$ = constante, appelée loi polytropique. P est la pression du gaz, et V le volume d'une mole de ce gaz. On prendra $k = 1{,}16$. Calculer dans ces conditions le travail W_T' fourni à une mole de gaz par la turbine.

4.3. On veut que la puissance de la turbine soit $\mathcal{P} = 1$ kW. Quels doivent être en $kg.h^{-1}$ les débits massiques gazeux D et D' respectivement dans l'hypothèse du §4.1 et dans celle du §4.2.

2. On utilise maintenant le réservoir R pour faire fonctionner un moteur à réaction. Le gaz G est envoyé dans une tuyère calorifugée τ à la sortie de laquelle règne la pression atmosphérique $P_0 = 1$ bar et où la vitesse du gaz n'est plus négligeable (fig. 4), alors qu'à l'entrée elle est toujours négligeable.

Figure 4



Pour tenir compte des irréversibilités, on admet la loi d'évolution polytropique $PV^{k'}$ = constante avec $k' = 1{,}04$.

2.1. Calculer la vitesse d'éjection du gaz par rapport à la tuyère.

2.2. Calculer en $kg.h^{-1}$ le débit massique gazeux D_2 pour que la puissance d'éjection du gaz soit $P = 1$ kW.

2.3. Calculer la poussée F du gaz sur le réacteur en fonction de D_2. Donner la valeur numérique de F.

Exo 4 **Mascaret**

Une vague de hauteur h remonte à la vitesse V un canal de profondeur H. (On note $H' = H + h$). L'eau du canal est immobile. On modélise la vague par une marche rectangulaire (voir figure 1).

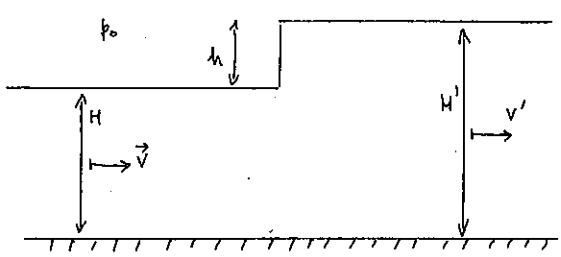


FIG. 1 –

On se place dans le référentiel lié à la vague. Dans ce référentiel, l'eau du canal se déplace à la vitesse V (dans l'autre sens, bien sûr) en amont de la vague et à la vitesse V' en aval (voir figure). Pourquoi ce choix de référentiel ?

Quelle relation liant H, H', V et V' traduit la conservation de la masse ?

La pression atmosphérique est notée p_0. On admet qu'en amont comme en aval, la pression de l'eau varie comme en hydrostatique. On note ρ la masse volumique de l'eau et g l'intensité de la pesanteur. Faire un bilan de quantité de mouvement à travers un volume de contrôle judicieusement choisi et en déduire une nouvelle relation entre données et inconnues du problème.

En déduire une expression de V en fonction de g, H et h. Que devient cette expression si $h \ll H$?

Grâce à un bilan énergétique, calculer la puissance dissipée par les forces intérieures.

Exo 5 Onde de choc

Un courant d'air fait claquer une porte ; il s'ensuit une onde de choc, à savoir la propagation à une vitesse V (inconnue) d'un plan de discontinuité. En aval de l'onde de choc, l'air est immobile et l'on connaît sa pression p_0, sa température T_0 et sa masse volumique μ_0. En amont l'air a une vitesse u (connue, perpendiculaire au plan de l'onde de choc) et ses caractéristiques sont p_1, T_1 et μ_1 (inconnues). L'air est assimilé a un gaz parfait ; quelle relation en déduit-on entre données et inconnues du problème ?

En définissant explicitement un système fermé, faire un bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie cinétique.

On suppose la perturbation faible et l'on pose $p_1 = p_0\,(1+x)$, $T_1 = T_0\,(1+y)$ et $\mu_1 = \mu_0\,(1+z)$; que deviennent les équations au premier ordre ? En déduire que V est indépendant de u et la comparer à la vitesse du son dans le milieu non perturbé, soit $V_{son} = \sqrt{\dfrac{\gamma\, p_0}{\mu_0}}$.

Etudier l'entropie créée par le passage de l'onde.

Exo 6 Étude d'une tuyère

Un gaz parfait s'écoule de façon adiabatique réversible dans une tuyère de section lentement variable de sorte que la vitesse soit partout colinéaire à l'axe Ox (cf figure 3). L'écoulement est permanent. La section S, la masse volumique ρ, la pression p, la température T et la vitesse v ne dépendent que de l'abscisse x.

Première approche : Traduire l'équation d'état et la relation de LAPLACE en comparant ce qui se passe aux

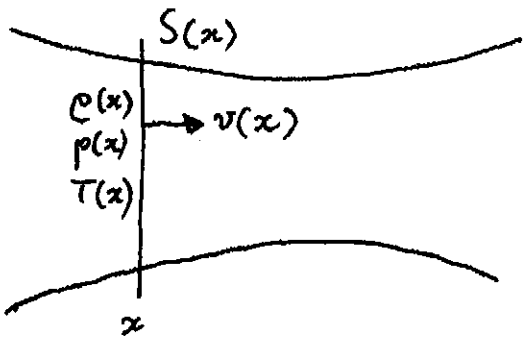


FIG. 3 – exercice 506

abscisses $x = 0$ et x quelconque, faire entre ces mêmes abscisses un bilan de masse en introduisant le débit massique D, puis expliciter l'équation d'EULER. On suppose qu'à l'entrée de la tuyère la section est très grande ($S(0) = \infty$) et donc la vitesse très petite ($v(0) = 0$), l'indétermination éventuelle étant levée par la donnée du débit massique.

Montrer que :

$$D = C^{te}.S(x).f\left(\frac{p(x)}{p(0)}\right)$$

où f est une fonction à déterminer et à étudier (si, si, c'est possible). En déduire que si la pression de sortie est assez petite la section S commence par décroître puis finit par croître (tuyère convergente-divergente).

Seconde approche : En pensant à la formule donnant la poussée d'un réacteur, montrer qu'on a intérêt à accélerer le fluide. Dériver le bilan de quantité de mouvement par rapport à l'abscisse, introduire la vitesse du son *locale* définie par $c^2 = \gamma p/\rho$ puis le nombre de Mach $\mathcal{M} = v/c$ et montrer que :

$$\frac{\mathcal{M}^2}{v}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{\gamma.p}\frac{dp}{dx} = 0$$

En utilisant la relation de Laplace et la formule donnant le débit massique sous forme de différentielle logarithmique, montrer que :

$$(\mathcal{M}^2 - 1)\frac{dv}{v} = \frac{dS}{S}$$

et revisiter la notion de convergent-divergent.