

DM n°2 de Physique

EVH/PC/2009-2010
Lycée DESCARTES (MONTIGNY-LE-BRETONNEUX)

à rendre pour le vendredi 16 octobre

en binôme ou en monôme

Chaque question doit avoir été cherchée.

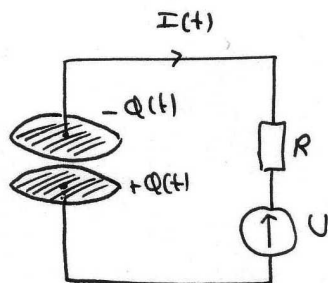
Les quatre parties sont largement indépendantes.

Problème Étude approfondie d'un condensateur et d'une bobine

A - Aspects énergétiques

I - Bilan énergétique associé à un condensateur

Le condensateur du circuit électrique ci-dessous est constitué de deux disques métalliques, d'axe (Oz), de rayon a et de distants de e . On négligera tout effet de bord.



1. Quelles sont les valeurs du champ électrique et du champ magnétique à l'intérieur du condensateur en régime variable ?
2. Calculer en fonction de $Q(t)$, $I(t)$, c et a , le rapport ρ du terme magnétique au terme électrique de l'énergie volumique en $r = a$.
On se place dans le cadre de l'ARQP : évaluer le rapport $\frac{Q}{I}$ et donner une nouvelle expression de ρ ; conclure. En déduire l'expression de la capacité d'un condensateur plan.
3. Calculer le flux d'énergie électromagnétique qui passe à travers les parois du cylindre que forme le condensateur.
4. L'identité de Poynting est-elle vérifiée ?

II - Énergie magnétique stockée dans une bobine

Une bobine, de longueur l , de rayon a et d'axe (Oz) est constituée d'un enroulement de n spires circulaires jointives par unité de longueur. On utilisera pour l'étude qui suit l'approximation du solénoïde infini pour décrire cette bobine et l'on se placera dans le cadre de l'ARQP. La bobine est parcourue par un courant I .

1. Exprimer le champ magnétique engendré par la bobine dans tout l'espace.
2. Quelle est l'énergie magnétique $\mathcal{E}_m$ associée à la bobine ? Quelle valeur du coefficient d'induction L pour la bobine peut-on en déduire ? AN : $I = 1A$, $l = 10cm$, $a = 10cm$, $n = 5000m^{-1}$.
3. La bobine est mise en charge par un générateur de force électromotrice e , de résistance interne R grande par rapport à celle de l'enroulement. Quelle est la loi d'évolution du courant dans le circuit, fermé à l'instant $t = 0$?
4. Calculer les champs magnétique et électrique engendrés par la bobine à l'instant t en tout point. On utilisera pour cela la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday sur un contour bien choisi. Comparer les ordres de grandeur des densités volumiques d'énergie magnétique et électrique.
5. Quelle est l'expression du flux du vecteur de Poynting à travers la surface délimitant le volume où la bobine crée un champ non négligeable ? Interpréter ce résultat en terme de bilan d'énergie.

B - Pression électrostatique et pression magnétostatique

Nous allons tenter de montrer dans cette partie que les champs électromagnétiques présents dans le condensateur ou la bobine agissent sur ceux-ci et ont tendance à les faire implorer.

I - Pression électrostatique

Un conducteur occupant le demi-espace infini $x > 0$ est caractérisé par une distribution volumique de charge de densité volumique $\rho(x) = \rho_0 e^{-\frac{x}{a}}$, alors que le demi-espace $x < 0$ est vide ($\rho = 0$). La surface de séparation est le plan yOz ; a est une distance très petite de l'ordre de la dizaine de nm.

1. Justifier la direction du champ électrique en tout point de l'espace. De quelle(s) variable(s) dépend sa norme ? De quelle(s) variable(s) dépend le potentiel V ?
2. Quelle est l'équation aux dérivées partielles vérifiée par V (on fera deux cas) ? En déduire l'expression du potentiel V en tout point M de l'espace sachant que l'on fixe $V(x = 0) = 0$ et que le milieu impose au champ $\vec{E}$ d'être nul en $x \rightarrow +\infty$.
3. Exprimer $\vec{E}$ pour $x < 0$ et $x > 0$ puis tracer avec soin sur des graphes séparés les courbes de variation de $E_x = \vec{E} \cdot \vec{u}_x$ et de $V(x)$.
4. Comment se déforment ces courbes lorsque $a \rightarrow 0$ en supposant que le produit $\rho_0 a$ reste constant (refaire les graphes) ? Montrer que le système est alors équivalent à un modèle de répartition surfacique dans le plan $x = 0$ avec une densité surfacique σ à déterminer.

5. Quelle est la force $\overrightarrow{dF_S}$ à laquelle est soumis un élément de volume $d\tau$ entourant un point M du demi-espace $x > 0$? En déduire la résultante des forces $\overrightarrow{F_S}$ qui s'exerce sur un tube de section S et de hauteur infinie depuis $x = 0$ jusqu'à $x \rightarrow +\infty$. Quel est sa direction et son sens?
6. Que représente la quantité $\frac{|F_S|}{S}$ et vers quelle limite tend cette valeur lorsque $a \rightarrow 0$ alors que le produit $\rho_0 a$ reste constant? Exprimer le résultat obtenu en fonction de ε_0 et σ , puis en fonction de ε_0 et $E(0)$, valeur du champ électrique au voisinage de la surface $x = 0$. Commenter en considérant qu'un condensateur est constitué de deux de ces plans en regard.

II - Pression magnétostatique

Un cylindre infini (ou solénoïde infini) d'axe (Oz) et de rayon a est parcouru par un courant de densité superficielle $\overrightarrow{j_s} = j_s \overrightarrow{u_\theta}$ constant dont les lignes de courant sont des cercles d'axe (Oz). Cette distribution crée, à l'intérieur, un champ $\overrightarrow{B_0}$. Le champ magnétique $\overrightarrow{B_{ext}}$ à l'extérieur du cylindre est nul.

1. Expression de $\overrightarrow{B_0}$:
 - (a) Montrer qu'un champ uniforme $\overrightarrow{B_0}$ satisfait aux équations de Maxwell à l'intérieur du cylindre.
 - (b) Rappeler les relations de passage relatives aux composantes du champ magnétique à une interface.
 - (c) En déduire l'expression de $\overrightarrow{B_0}$.
2. Expression du potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$ en tout point de l'espace :
 - (a) Par des considérations qualitatives précises, déterminer la direction de $\overrightarrow{A}$ et la (ou les) coordonnées dont dépend la valeur algébrique de ce champ.
 - (b) Vérifier que si un champ $\overrightarrow{B_0}$ est uniforme, il dérive du potentiel $\overrightarrow{A} = \frac{\overrightarrow{B_0}}{2} \wedge \overrightarrow{OM}$.
En déduire l'expression du potentiel vecteur à l'intérieur du cylindre $\overrightarrow{A_{int}}$.
 - (c) En utilisant notamment la continuité du potentiel vecteur en $r = a$, déterminer l'expression $\overrightarrow{A_{ext}}$ du potentiel vecteur à l'extérieur du cylindre.
3. Force de Laplace exercée sur l'épaisseur du cylindre :
On suppose maintenant que les courants sont répartis entre deux cylindres coaxiaux de rayon a et $a + e$. On appelle $\overrightarrow{j}(r)$ la densité volumique de courant électrique. On se place dans l'hypothèse où $e \ll a$ pour que les résultats précédents soient toujours valables à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde. On a alors

$$\overrightarrow{j_s} = \int_a^{a+e} \overrightarrow{j}(r) dr$$

- (a) Montrer qu'entre $r = a$ et $r = a + e$, $\overrightarrow{B} = B(r)\overrightarrow{u_z}$.

- (b) Exprimer $\vec{j}(r)$ en fonction d'une dérivée du champ magnétique $\vec{B}$.
 - (c) Exprimer la force de Laplace subie par un élément de volume $d\tau$.
 - (d) En déduire l'expression de la force magnétique $d\vec{F}$ subie par un élément de surface dS du solénoïde (d'épaisseur e). Préciser son orientation.
 - (e) Définir et calculer la pression magnétostatique en fonction de μ_0 et j_s .
4. Par analogie avec un solénoïde de longueur $l = 40$ cm, de rayon $a = 1$ cm constitué de $n = 5000$ spires par unité de longueur parcouru par un courant $I = 10$ A, en déduire l'ordre de grandeur de la pression magnétostatique. Commenter.

On rappelle l'expression du rotationnel d'un vecteur $\vec{A}$ en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial z} \right] \vec{u}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_z$$